La méthode des moments en théorie du contrôle

Farid Ammar Khodja,

Guelma le 20/05/12

- Soient H et U deux espaces de Hilbert séparables. Dans cette section, $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ est un opérateur linéaire non borné, générateur d'un C^0-semi-groupe que l'on notera $\left(e^{tA}\right)$ et, pour simplifier, $B \in \mathcal{L}(U, H)$.

- Soient H et U deux espaces de Hilbert séparables. Dans cette section, $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ est un opérateur linéaire non borné, générateur d'un C^0−semi-groupe que l'on notera $\left(e^{tA}\right)$ et, pour simplifier, $B \in \mathcal{L}(U, H)$.
- Considérons le problème suivant:

$$\begin{cases} y' = Ay + Bu, & (0, T) \\ y(0) = y_0, \end{cases} \tag{1}$$

avec $u \in L^2(0, T; U)$ et $y_0 \in H$.

- Soient H et U deux espaces de Hilbert séparables. Dans cette section, $A : D(A) \subset H \to H$ est un opérateur linéaire non borné, générateur d'un C^0-semi-groupe que l'on notera $\left(e^{tA}\right)$ et, pour simplifier, $B \in \mathcal{L}(U, H)$.
- Considérons le problème suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} y' = Ay + Bu, \quad (0, T) \\ y(0) = y_0, \end{array} \right. \tag{1}$$

avec $u \in L^2(0, T; U)$ et $y_0 \in H$.

- La théorie des semi-groupes implique que ce problème admet une solution $y \in C([0, T], H)$ donnée par:

$$y(t; y_0, u) = e^{tA} y_0 + \int_0^t e^{(t-s)} Bu(s) ds, \ \ t \in [0, T].$$

- On dit que le système ou la paire (A, B) est **exactement contrôlable** au temps $T > 0$ si pour tout $(y_0, y_1) \in H \times H$, il existe $u \in L^2\,(0, T; U)$ tel que $y(T; y_0, u) = y_1$.

- On dit que le système ou la paire (A, B) est **exactement contrôlable** au temps $T > 0$ si pour tout $(y_0, y_1) \in H \times H$, il existe $u \in L^2(0, T; U)$ tel que $y(T; y_0, u) = y_1$.
- On dit que le système ou la paire (A, B) est **approximativement contrôlable** au temps $T > 0$ si pour tout $(y_0, y_1) \in H \times H$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $u \in L^2(0, T; U)$ tel que $\|y(T; y_0, u) - y_1\|_H < \varepsilon$.

- On dit que le système ou la paire (A, B) est **exactement contrôlable** au temps $T > 0$ si pour tout $(y_0, y_1) \in H \times H$, il existe $u \in L^2(0, T; U)$ tel que $y(T; y_0, u) = y_1$.
- On dit que le système ou la paire (A, B) est **approximativement contrôlable** au temps $T > 0$ si pour tout $(y_0, y_1) \in H \times H$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $u \in L^2(0, T; U)$ tel que $\|y(T; y_0, u) - y_1\|_H < \varepsilon$.
- On dit que le système ou la paire (A, B) est **contrôlable à zéro (ou aux trajectoires)** au temps $T > 0$ si pour tout $y_0 \in H$, il existe $u \in L^2(0, T; U)$ tel que $y(T; y_0, u) = 0$.

Le cas qui va être traité ici est le suivant.

1. Soit $(\phi_k)_{k\geq 1}$ une base orthonormale de H, $(\lambda_k)_{k\geq 1} \subset]0, +\infty[$ une suite strictement croissante telle que:

$$\sum_{k\geq 1} \frac{1}{\lambda_k} < \infty.$$

L'opérateur A sera défini par

$$\begin{aligned} Ay &= -\sum_{k\geq 1} \lambda_k (y, \phi_k) \phi_k, \\ D(A) &= \left\{ y \in H : \sum_{k\geq 1} \lambda_k^2 |(y, \phi_k)|^2 < \infty \right\}. \end{aligned}$$

Le cas qui va être traité ici est le suivant.

1. Soit $(\phi_k)_{k\geq 1}$ une base orthonormale de H, $(\lambda_k)_{k\geq 1} \subset]0, +\infty[$ une suite strictement croissante telle que:

$$\sum_{k\geq 1} \frac{1}{\lambda_k} < \infty.$$

L'opérateur A sera défini par

$$\begin{aligned} Ay &= -\sum_{k\geq 1} \lambda_k (y, \phi_k) \phi_k, \\ D(A) &= \left\{ y \in H : \sum_{k\geq 1} \lambda_k^2 \left|(y, \phi_k)\right|^2 < \infty \right\}. \end{aligned}$$

2. Soit $b \in H$ et $U = \mathbb{R}$. L'opérateur $B : \mathbb{R} \to H$ sera défini par

$$Bu = bu, \ \ u \in \mathbb{R}.$$

- On peut vérifier que A est autoadjoint et que le semi-groupe qu'il engendre est donné par:

$$e^{tA} = \sum_{k \geq 1} e^{-\lambda_k t} \left(\cdot, \phi_k\right) \phi_k, \;\; t > 0.$$

- On peut vérifier que A est autoadjoint et que le semi-groupe qu'il engendre est donné par:

$$e^{tA} = \sum_{k \geq 1} e^{-\lambda_k t} (\cdot, \phi_k) \phi_k, \; t > 0.$$

- De plus, il est clair que $B \in L(\mathbb{R}, H)$.

- On peut vérifier que A est autoadjoint et que le semi-groupe qu'il engendre est donné par:

$$e^{tA} = \sum_{k\geq 1} e^{-\lambda_k t} \left(\cdot, \phi_k\right) \phi_k, \;\; t > 0.$$

- De plus, il est clair que $B \in L\left(\mathbb{R}, H\right)$.
- Si on se donne $y_0 \in H$ et $u \in L^2\left(0, T; \mathbb{R}\right)$, alors la solution du problème (1) s'écrit:

$$y(t) = \sum_{k\geq 1} \left(\underbrace{e^{-\lambda_k t} \left(y_0, \phi_k\right) + \int_0^t e^{-\lambda_k (t-s)} u(s) ds \left(b, \phi_k\right)}_{:=y_k(t)} \right) \phi_k$$

Contrôlabilité exacte

- Soit $y_0,\ y_1 \in H$ et cherchons à résoudre le problème suivant: trouver $u \in L^2\left(0,\ T; \mathbb{R}\right)$ tel que
$$y\left(T\right) = y_1.$$

Contrôlabilité exacte

- Soit $y_0, y_1 \in H$ et cherchons à résoudre le problème suivant: trouver $u \in L^2\left(0, T; \mathbb{R}\right)$ tel que
$$y\left(T\right) = y_1.$$
- D'après la formule donnant y, cela revient à résoudre l'équation
$$\sum_{k \geq 1} y_k(T)\phi_k = \sum_{k \geq 1} \left(y_1, \phi_k\right)\phi_k.$$

Contrôlabilité exacte

- Soit y_0, $y_1 \in H$ et cherchons à résoudre le problème suivant: trouver $u \in L^2\left(0, T; \mathbb{R}\right)$ tel que
$$y\left(T\right) = y_1.$$
- D'après la formule donnant y, cela revient à résoudre l'équation
$$\sum_{k \geq 1} y_k(T)\phi_k = \sum_{k \geq 1} \left(y_1, \phi_k\right)\phi_k.$$
- Comme $\left(\phi_k\right)_{k \geq 1}$ est une base orthonormale, cela est équivalent à
$$e^{-\lambda_k T}\left(y_0, \phi_k\right) + \int_0^T e^{-\lambda_k(T-s)}u(s)ds\left(b, \phi_k\right) = \left(y_1, \phi_k\right), \ \forall k \geq 1.$$

- On voit déjà qu'une condition nécessaire est:

$$(b, \phi_k) \neq 0, \ \forall k \geq 1. \tag{2}$$

- On voit déjà qu'une condition nécessaire est:

$$(b, \phi_k) \neq 0, \ \forall k \geq 1. \tag{2}$$

- Car, s'il existe $k_0 \geq 1$ tel que $\left(b, \phi_{k_0}\right) = 0$, il suffit de choisir $y_1 = \left(y_1, \phi_{k_0}\right) \phi_{k_0}$ tel que $\left(y_1, \phi_{k_0}\right) \neq e^{-\lambda_{k_0} T} \left(y_0, \phi_{k_0}\right)$ et le problème ne peut avoir de solution.

- On voit déjà qu'une condition nécessaire est:

$$(b, \phi_k) \neq 0, \ \forall k \geq 1. \tag{2}$$

- Car, s'il existe $k_0 \geq 1$ tel que $\left(b, \phi_{k_0}\right) = 0$, il suffit de choisir $y_1 = \left(y_1, \phi_{k_0}\right) \phi_{k_0}$ tel que $\left(y_1, \phi_{k_0}\right) \neq e^{-\lambda_{k_0} T} \left(y_0, \phi_{k_0}\right)$ et le problème ne peut avoir de solution.
- Supposons donc (2) réalisée. Nous allons établir que cette condition n'est pas suffisante. Pour cela, on commence par constater que:

$$\sum_{k \geq 1} |\lambda_k|^{2n} e^{-2\lambda_k T} \left|(y_0, \phi_k)\right|^2 < \infty, \ \forall n \geq 0.$$

- D'autre part:

$$
\begin{aligned}
&\left| \int_0^T e^{-\lambda_k (T-s)} u(s) ds \, (b, \phi_k) \right|^2 \\
\leq \ & \int_0^T e^{-2\lambda_k (T-s)} ds \int_0^T u^2(s) ds \ \ |(b, \phi_k)|^2
\end{aligned}
$$

- D'autre part:

$$
\begin{aligned}
& \left| \int_0^T e^{-\lambda_k (T-s)} u(s) ds \, (b, \phi_k) \right|^2 \\
\leq \ & \int_0^T e^{-2\lambda_k (T-s)} ds \int_0^T u^2(s) ds \ \ |(b, \phi_k)|^2
\end{aligned}
$$

- D'autre part:

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^T e^{-\lambda_k(T-s)}u(s)ds\,(b,\phi_k)\right|^2\\
\leq\ & \int_0^T e^{-2\lambda_k(T-s)}ds\int_0^T u^2(s)ds\ \ |(b,\phi_k)|^2\\
\leq\ & \frac{1}{2\lambda_k}\|u\|^2_{L^2(0,T)}\ \ |(b,\phi_k)|^2
\end{aligned}$$

- Puisque par hypothèse $b\in H$, cette dernière inégalité implique

$$\sum_{k\geq 1}|\lambda_k|\left|\int_0^T e^{-\lambda_k(T-s)}u(s)ds\,(b,\phi_k)\right|^2<\infty,\ \ \forall u\in L^2(0,T).$$

- Il s'ensuit qu'une condition nécessaire pour que notre problème de contrôle admette une solution est que

$$\sum_{k\geq 1} |\lambda_k| \left|(y_1, \phi_k)\right|^2 < \infty.$$

- Il s'ensuit qu'une condition nécessaire pour que notre problème de contrôle admette une solution est que

$$\sum_{k\geq 1} |\lambda_k| \left|(y_1, \phi_k)\right|^2 < \infty.$$

- Mais il est aisé de prouver qu'il existe $y_1 \in H$ tel que $\sum_{k\geq 1} |\lambda_k| \left|(y_1, \phi_k)\right|^2 = \infty$.

- Il s'ensuit qu'une condition nécessaire pour que notre problème de contrôle admette une solution est que

$$\sum_{k\geq 1} |\lambda_k| \left|(y_1, \phi_k)\right|^2 < \infty.$$

- Mais il est aisé de prouver qu'il existe $y_1 \in H$ tel que $\sum_{k\geq 1} |\lambda_k| \left|(y_1, \phi_k)\right|^2 = \infty$.
- Nous venons de montrer que:

- Il s'ensuit qu'une condition nécessaire pour que notre problème de contrôle admette une solution est que

$$\sum_{k\geq 1} |\lambda_k| \left|(y_1, \phi_k)\right|^2 < \infty.$$

- Mais il est aisé de prouver qu'il existe $y_1 \in H$ tel que $\sum_{k\geq 1} |\lambda_k| \left|(y_1, \phi_k)\right|^2 = \infty$.
- Nous venons de montrer que:

Théorème

Avec les hypothèses de ce paragraphe, le problème (1) n'est pas exactement contrôlable.

Contrôlabilité approchée

- De la même manière que dans le raisonnement précédent, une condition nécessaire pour la contrôlabilité approchée est que $(b, \phi_k) \neq 0, \ \forall k \geq 1$.

Contrôlabilité approchée

- De la même manière que dans le raisonnement précédent, une condition nécessaire pour la contrôlabilité approchée est que $(b, \phi_k) \neq 0, \ \forall k \geq 1.$
- Notons

$$E = \left\{ \sum_{k\geq 1} \int_0^T e^{-\lambda_k (T-s)} u(s) ds \, (b, \phi_k) \, \phi_k, \ \ u \in L^2 \, (0, T) \right\}.$$

Contrôlabilité approchée

- De la même manière que dans le raisonnement précédent, une condition nécessaire pour la contrôlabilité approchée est que $(b, \phi_k) \neq 0, \ \forall k \geq 1$.
- Notons

$$E = \left\{ \sum_{k\geq 1} \int_0^T e^{-\lambda_k (T-s)} u(s) ds \, (b, \phi_k) \, \phi_k, \ \ u \in L^2 (0, T) \right\}.$$

- Nous allons établir que

$$((b, \phi_k) \neq 0, \ \forall k \geq 1) \Rightarrow \overline{E} = H$$

Contrôlabilité approchée

- De la même manière que dans le raisonnement précédent, une condition nécessaire pour la contrôlabilité approchée est que $(b, \phi_k) \neq 0, \ \forall k \geq 1$.
- Notons

$$E = \left\{ \sum_{k \geq 1} \int_0^T e^{-\lambda_k (T-s)} u(s) ds \, (b, \phi_k) \, \phi_k, \ \ u \in L^2 \, (0, T) \right\}.$$

- Nous allons établir que

$$((b, \phi_k) \neq 0, \ \forall k \geq 1) \Rightarrow \overline{E} = H$$

- On peut vérifier que E est bien un sous-espace de H. On alors

$$\overline{E} = H \Leftrightarrow E^{\perp} = \{0\}$$

Or:

$$\varphi \in E^{\perp} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} \int_0^T \left(\sum_{k\geq 1} e^{-\lambda_k(T-s)} \left(b, \phi_k\right) \left(\phi_k, \varphi\right) \right) u(s)ds = 0, \\ \forall u \in L^2\left(0, T\right) \end{array} \right)$$

Or:

$$
\begin{aligned}
\varphi \quad \in \quad E^{\perp} \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} \int_0^T \left(\sum_{k\geq 1} e^{-\lambda_k (T-s)} \left(b, \phi_k\right) \left(\phi_k, \varphi\right) \right) u(s)ds = 0, \\ \forall u \in L^2\left(0, T\right) \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow \quad & \sum_{k\geq 1} e^{-\lambda_k (T-s)} \left(b, \phi_k\right) \left(\phi_k, \varphi\right) = 0, \ \forall s \in \left(0, T\right)
\end{aligned}
$$

Or:

$$\begin{aligned}
\varphi \in E^{\perp} &\Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} \int_0^T \left(\sum_{k\geq 1} e^{-\lambda_k(T-s)}\left(b,\phi_k\right)\left(\phi_k,\varphi\right)\right) u(s)ds = 0, \\ \forall u \in L^2\left(0,T\right) \end{array} \right) \\
&\Leftrightarrow \sum_{k\geq 1} e^{-\lambda_k(T-s)}\left(b,\phi_k\right)\left(\phi_k,\varphi\right) = 0,\ \forall s \in (0,T) \\
&\Leftrightarrow f(t) := \sum_{k\geq 1} e^{-\lambda_k t}\left(b,\phi_k\right)\left(\phi_k,\varphi\right) = 0,\ \forall t \in (0,T)
\end{aligned}$$

Or:

$$\begin{aligned}
\varphi \quad \in \quad & E^{\perp} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} \int_0^T \left(\sum_{k\geq 1} e^{-\lambda_k (T-s)} \left(b, \phi_k\right) \left(\phi_k, \varphi\right) \right) u(s) ds = 0, \\ \forall u \in L^2\left(0, T\right) \end{array} \right) \\
& \Leftrightarrow \sum_{k\geq 1} e^{-\lambda_k (T-s)} \left(b, \phi_k\right) \left(\phi_k, \varphi\right) = 0, \ \forall s \in \left(0, T\right) \\
& \Leftrightarrow f(t) := \sum_{k\geq 1} e^{-\lambda_k t} \left(b, \phi_k\right) \left(\phi_k, \varphi\right) = 0, \ \forall t \in \left(0, T\right)
\end{aligned}$$

f est la restriction d'une fonction analytique sur $(0, +\infty)$. Donc:

$$\varphi \in E^{\perp} \Leftrightarrow \sum_{k\geq 1} e^{-\lambda_k t} \left(b, \phi_k\right) \left(\phi_k, \varphi\right) = 0, \ \forall t \in (0, +\infty)$$

Or:

$$\begin{aligned}
\varphi \in E^{\perp} &\Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} \int_0^T \left(\sum_{k\geq 1} e^{-\lambda_k (T-s)} (b, \phi_k)(\phi_k, \varphi) \right) u(s) ds = 0, \\ \forall u \in L^2(0,T) \end{array} \right) \\
&\Leftrightarrow \sum_{k\geq 1} e^{-\lambda_k (T-s)} (b, \phi_k)(\phi_k, \varphi) = 0, \ \forall s \in (0,T) \\
&\Leftrightarrow f(t) := \sum_{k\geq 1} e^{-\lambda_k t} (b, \phi_k)(\phi_k, \varphi) = 0, \ \forall t \in (0,T)
\end{aligned}$$

f est la restriction d'une fonction analytique sur $(0, +\infty)$. Donc:

$$\varphi \in E^{\perp} \Leftrightarrow \sum_{k\geq 1} e^{-\lambda_k t} (b, \phi_k)(\phi_k, \varphi) = 0, \ \forall t \in (0, +\infty)$$

En multipliant cette dernière égalité par $e^{\lambda_1 t}$ et en faisant tendre t vers $+\infty$, on trouve:

$$(b, \phi_1)(\phi_1, \varphi) = 0$$

Or:

$$\begin{aligned}\varphi \in E^{\perp} &\Leftrightarrow \left(\begin{array}{c}\int_0^T \left(\sum_{k\geq 1} e^{-\lambda_k(T-s)}(b,\phi_k)(\phi_k,\varphi)\right) u(s)ds = 0, \\ \forall u \in L^2(0,T)\end{array}\right) \\ &\Leftrightarrow \sum_{k\geq 1} e^{-\lambda_k(T-s)}(b,\phi_k)(\phi_k,\varphi) = 0,\ \forall s \in (0,T) \\ &\Leftrightarrow f(t) := \sum_{k\geq 1} e^{-\lambda_k t}(b,\phi_k)(\phi_k,\varphi) = 0,\ \forall t \in (0,T)\end{aligned}$$

f est la restriction d'une fonction analytique sur $(0,+\infty)$. Donc:

$$\varphi \in E^{\perp} \Leftrightarrow \sum_{k\geq 1} e^{-\lambda_k t}(b,\phi_k)(\phi_k,\varphi) = 0,\ \forall t \in (0,+\infty)$$

En multipliant cette dernière égalité par $e^{\lambda_1 t}$ et en faisant tendre t vers $+\infty$, on trouve:

$$(b,\phi_1)(\phi_1,\varphi) = 0 \Rightarrow (\phi_1,\varphi) = 0$$

Or:

$$\begin{aligned}
\varphi \quad \in \quad E^{\perp} \Leftrightarrow & \left(\begin{array}{c} \int_0^T \left(\sum_{k\geq 1} e^{-\lambda_k (T-s)} (b, \phi_k)(\phi_k, \varphi) \right) u(s) ds = 0, \\ \forall u \in L^2(0,T) \end{array} \right) \\
\Leftrightarrow & \quad \sum_{k\geq 1} e^{-\lambda_k (T-s)} (b, \phi_k)(\phi_k, \varphi) = 0, \ \forall s \in (0,T) \\
\Leftrightarrow & \quad f(t) := \sum_{k\geq 1} e^{-\lambda_k t} (b, \phi_k)(\phi_k, \varphi) = 0, \ \forall t \in (0,T)
\end{aligned}$$

f est la restriction d'une fonction analytique sur $(0, +\infty)$. Donc:

$$\varphi \in E^{\perp} \Leftrightarrow \sum_{k\geq 1} e^{-\lambda_k t} (b, \phi_k)(\phi_k, \varphi) = 0, \ \forall t \in (0, +\infty)$$

En multipliant cette dernière égalité par $e^{\lambda_1 t}$ et en faisant tendre t vers $+\infty$, on trouve:

$$(b, \phi_1)(\phi_1, \varphi) = 0 \Rightarrow (\phi_1, \varphi) = 0$$

Puis, par récurrence, $(\phi_k, \varphi) = 0$ pour tout $k \geq 1$.

- Mais $\overline{E} = H$ équivaut à la contrôlabilité approchée. Nous avons donc démontré:

Théorème

Avec les hypothèses de ce paragraphe, le problème (1) est approximativement contrôlable si et seulement si $(b, \phi_k) \neq 0, \ \forall k \geq 1$.

Remarque

Noter que nous n'avons pas utilisé que $\sum_{k\geq 1} 1/\lambda_k$ *converge...*

Contrôlabilité à zéro

- De nouveau et de la même manière, la condition $(b, \phi_k) \neq 0, \; \forall k \geq 1$ est nécessaire pour la contrôlabilité à zéro. Mais cette condition est-elle suffisante?

Contrôlabilité à zéro

- De nouveau et de la même manière, la condition $(b, \phi_k) \neq 0, \ \forall k \geq 1$ est nécessaire pour la contrôlabilité à zéro. Mais cette condition est-elle suffisante?
- Supposons la réalisée. Elle se ramène à: étant donné $y_0 \in H$, existe-t-il $u \in L^2(0, T)$ tel que

$$\int_0^T e^{-\lambda_k (T-s)} u(s) ds \, (b, \phi_k) = -e^{-\lambda_k T} (y_0, \phi_k), \ \forall k \geq 1.$$

Contrôlabilité à zéro

- De nouveau et de la même manière, la condition $(b, \phi_k) \neq 0, \ \forall k \geq 1$ est nécessaire pour la contrôlabilité à zéro. Mais cette condition est-elle suffisante?
- Supposons la réalisée. Elle se ramène à: étant donné $y_0 \in H$, existe-t-il $u \in L^2(0, T)$ tel que

$$\int_0^T e^{-\lambda_k(T-s)} u(s)ds\,(b, \phi_k) = -e^{-\lambda_k T}(y_0, \phi_k), \ \forall k \geq 1.$$

- En faisant le changement de variable $t = T - s$ et $v(t) = u(T - s)$, il s'agit de trouver $v \in L^2(0, T)$ tel que

$$\int_0^T e^{-\lambda_k t} v(t)dt = -\frac{e^{-\lambda_k T}(y_0, \phi_k)}{(b, \phi_k)}, \ \forall k \geq 1.$$

Contrôlabilité à zéro

- De nouveau et de la même manière, la condition $(b, \phi_k) \neq 0, \ \forall k \geq 1$ est nécessaire pour la contrôlabilité à zéro. Mais cette condition est-elle suffisante?
- Supposons la réalisée. Elle se ramène à: étant donné $y_0 \in H$, existe-t-il $u \in L^2(0, T)$ tel que

$$\int_0^T e^{-\lambda_k (T-s)} u(s) ds \, (b, \phi_k) = -e^{-\lambda_k T} (y_0, \phi_k), \ \forall k \geq 1.$$

- En faisant le changement de variable $t = T - s$ et $v(t) = u(T - s)$, il s'agit de trouver $v \in L^2(0, T)$ tel que

$$\int_0^T e^{-\lambda_k t} v(t) dt = -\frac{e^{-\lambda_k T} (y_0, \phi_k)}{(b, \phi_k)}, \ \forall k \geq 1.$$

- C'est le problème des moments.

- Le principe de sa résolution est le suivant: si la famille $\left(e^{-\lambda_k t}\right)$ admet une famille biorthogonale $(q_k) \subset L^2(0, T)$, c'est-à-dire vérifiant

$$\int_0^T e^{-\lambda_k t} q_l(t)dt = \delta_{kl}, \quad k, l \geq 1.$$

- Le principe de sa résolution est le suivant: si la famille $\left(e^{-\lambda_k t}\right)$ admet une famille biorthogonale $(q_k) \subset L^2(0, T)$, c'est-à-dire vérifiant

$$\int_0^T e^{-\lambda_k t} q_l(t) dt = \delta_{kl}, \; k, l \geq 1.$$

- La fonction

$$v = -\sum_{k \geq 1} \frac{e^{-\lambda_k T}(y_0, \phi_k)}{(b, \phi_k)} q_k$$

est une solution formelle.

- Le principe de sa résolution est le suivant: si la famille $\left(e^{-\lambda_k t}\right)$ admet une famille biorthogonale $(q_k) \subset L^2(0, T)$, c'est-à-dire vérifiant

$$\int_0^T e^{-\lambda_k t} q_l(t) dt = \delta_{kl}, \;\; k, l \geq 1.$$

- La fonction

$$v = -\sum_{k \geq 1} \frac{e^{-\lambda_k T} (y_0, \phi_k)}{(b, \phi_k)} q_k$$

  est une solution formelle.
- Si

$$\sum_{k \geq 1} e^{-\lambda_k T} \left| \frac{(y_0, \phi_k)}{(b, \phi_k)} \right| \|q_k\|_{L^2(0,T)} < \infty.$$

  alors $v \in L^2(0, T)$ et le problème est vraiment résolu...

- Le principe de sa résolution est le suivant: si la famille $\left(e^{-\lambda_k t}\right)$ admet une famille biorthogonale $(q_k) \subset L^2(0, T)$, c'est-à-dire vérifiant

$$\int_0^T e^{-\lambda_k t} q_l(t) dt = \delta_{kl}, \ \ k, l \geq 1.$$

- La fonction

$$v = -\sum_{k \geq 1} \frac{e^{-\lambda_k T}(y_0, \phi_k)}{(b, \phi_k)} q_k$$

  est une solution formelle.
- Si

$$\sum_{k \geq 1} e^{-\lambda_k T} \left| \frac{(y_0, \phi_k)}{(b, \phi_k)} \right| \|q_k\|_{L^2(0,T)} < \infty.$$

  alors $v \in L^2(0, T)$ et le problème est vraiment résolu...
- Tout revient donc à l'existence de (q_k) et à l'estimation de $\|q_k\|_{L^2(0,T)}$ lorsque k tend vers l'infini.

Existence d'une base biorthogonale

- Il y a plusieurs démarches possibles. Nous allons suivre celle de Laurent Schwartz: Étude de sommes exponentielles (1942?)

Existence d'une base biorthogonale

- Il y a plusieurs démarches possibles. Nous allons suivre celle de Laurent Schwartz: Étude de sommes exponentielles (1942?)
- On commence par considérer la suite $\left(e^{-\lambda_k t}\right)_{k\geq 1}$ dans l'intervalle $(0, +\infty)$.

Existence d'une base biorthogonale

- Il y a plusieurs démarches possibles. Nous allons suivre celle de Laurent Schwartz: Étude de sommes exponentielles (1942?)
- On commence par considérer la suite $\left(e^{-\lambda_k t}\right)_{k\geq 1}$ dans l'intervalle $(0, +\infty)$.
- On a besoin de quelques rappels d'analyse.

1. La transformation de Laplace est définie par

$$F(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} f(t) dt.$$

Si $f \in L^2(0, \infty)$, alors F est holomorphe dans le demi-plan $\mathbb{C}_+ = \{\Re(\lambda) > 0\}$, bornée dans tout demi-plan $\Re(\lambda) \geq \varepsilon > 0$ pour tout $\varepsilon > 0$ et dans un tel demi-plan, $\lim_{|\lambda| \to \infty} F(\lambda) = 0$.

1. La transformation de Laplace est définie par

$$F(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} f(t) dt.$$

   Si $f \in L^2(0, \infty)$, alors F est holomorphe dans le demi-plan $\mathbb{C}_+ = \{\mathfrak{R}(\lambda) > 0\}$, bornée dans tout demi-plan $\mathfrak{R}(\lambda) \geq \varepsilon > 0$ pour tout $\varepsilon > 0$ et dans un tel demi-plan, $\lim_{|\lambda| \to \infty} F(\lambda) = 0$.

2. Soit $\mathcal{H}^2$ l'ensemble des fonctions F holomorphes dans $\mathbb{C}_+$ et pour lesquelles $\int_{-\infty}^{+\infty} |F(\sigma + i\tau)|^2 d\tau < \infty \; \forall \sigma > 0$.

1. La transformation de Laplace est définie par

$$F(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} f(t) dt.$$

Si $f \in L^2(0,\infty)$, alors F est holomorphe dans le demi-plan $\mathbb{C}_+ = \{\Re(\lambda) > 0\}$, bornée dans tout demi-plan $\Re(\lambda) \geq \varepsilon > 0$ pour tout $\varepsilon > 0$ et dans un tel demi-plan, $\lim_{|\lambda|\to\infty} F(\lambda) = 0$.

2. Soit $\mathcal{H}^2$ l'ensemble des fonctions F holomorphes dans $\mathbb{C}_+$ et pour lequelles $\int_{-\infty}^{+\infty} |F(\sigma + i\tau)|^2 d\tau < \infty \ \forall \sigma > 0$.

3. Si $F \in \mathcal{H}^2$ alors la fonction $\tau \to F(i\tau)$ est dans $L^2(-\infty,\infty)$ et on peut écrire:

$$\|F\|_{\mathcal{H}^2} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |F(i\tau)|^2 d\tau \right)^{1/2}.$$

La transformation de Laplace

1. La transformation de Laplace est définie par

$$F(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} f(t) dt.$$

   Si $f \in L^2(0, \infty)$, alors F est holomorphe dans le demi-plan $\mathbb{C}_+ = \{\mathfrak{R}(\lambda) > 0\}$, bornée dans tout demi-plan $\mathfrak{R}(\lambda) \geq \varepsilon > 0$ pour tout $\varepsilon > 0$ et dans un tel demi-plan, $\lim_{|\lambda| \to \infty} F(\lambda) = 0$.

2. Soit $\mathcal{H}^2$ l'ensemble des fonctions F holomorphes dans $\mathbb{C}_+$ et pour lesquelles $\int_{-\infty}^{+\infty} |F(\sigma + i\tau)|^2 d\tau < \infty \ \forall \sigma > 0$.
3. Si $F \in \mathcal{H}^2$ alors la fonction $\tau \to F(i\tau)$ est dans $L^2(-\infty, \infty)$ et on peut écrire:

$$\|F\|_{\mathcal{H}^2} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |F(i\tau)|^2 d\tau \right)^{1/2}.$$

4. **La transformation de Laplace est une transformation linéaire continue et elle définit une isométrie de $L^2(0, \infty)$ dans $\mathcal{H}^2$.**

Construction de la famille biorthogonale

- A la suite $(\lambda_k)_{k\geq 1}$ précédemment définie, on associe le produit de Blaschke
$$\mathcal{B}(\lambda) = \prod_{k\geq 1} \frac{1-\lambda/\lambda_k}{1+\lambda/\lambda_k}.$$

- A la suite $(\lambda_k)_{k\geq 1}$ précédemment définie, on associe le produit de Blaschke
$$\mathcal{B}(\lambda) = \prod_{k\geq 1} \frac{1-\lambda/\lambda_k}{1+\lambda/\lambda_k}.$$
- On a immédiatement
$$\begin{aligned} |\mathcal{B}(\lambda)| &\leq 1, \ \forall \lambda \in \mathbb{C}_+, \\ |\mathcal{B}(i\tau)| &= 1, \ \forall \tau \in \mathbb{R} \end{aligned}$$
mais $B \notin \mathcal{H}^2$.

- A la suite $(\lambda_k)_{k\geq 1}$ précédemment définie, on associe le produit de Blaschke

$$\mathcal{B}(\lambda) = \prod_{k\geq 1} \frac{1-\lambda/\lambda_k}{1+\lambda/\lambda_k}.$$

- On a immédiatement

$$\begin{array}{rcl} |\mathcal{B}(\lambda)| & \leq & 1, \ \forall \lambda \in \mathbb{C}_+, \\ |\mathcal{B}(i\tau)| & = & 1, \ \forall \tau \in \mathbb{R} \end{array}$$

mais $B \notin \mathcal{H}^2$.

- Introduisons donc la fonction

$$J(\lambda) = \frac{\mathcal{B}(\lambda)}{(1+\lambda)^2}$$

Construction de la famille biorthogonale

- A la suite $(\lambda_k)_{k\geq 1}$ précédemment définie, on associe le produit de Blaschke

$$\mathcal{B}(\lambda) = \prod_{k\geq 1} \frac{1-\lambda/\lambda_k}{1+\lambda/\lambda_k}.$$

- On a immédiatement

$$\begin{array}{rcl} |\mathcal{B}(\lambda)| & \leq & 1,\ \forall \lambda \in \mathbb{C}_+, \\ |\mathcal{B}(i\tau)| & = & 1,\ \forall \tau \in \mathbb{R} \end{array}$$

  mais $B \notin \mathcal{H}^2$.
- Introduisons donc la fonction

$$J(\lambda) = \frac{\mathcal{B}(\lambda)}{(1+\lambda)^2}$$

- Il est immédiat que $J \in \mathcal{H}^2$. De sorte que:

$$\exists q \in L^2(0,\infty),\ J(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\psi(t)dt.$$

- Mais soit

$$J_k(\lambda) = \frac{J(\lambda)}{J'(\lambda_k)(\lambda - \lambda_k)}, k \geq 1.$$

- Mais soit
$$J_k(\lambda) = \frac{J(\lambda)}{J'(\lambda_k)(\lambda - \lambda_k)}, k \geq 1.$$
- Alors, pour tout $k \geq 1$, $J_k \in \mathcal{H}^2$ et il existe $\psi_k \in L^2(0, \infty)$ telle que:
$$J_k(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\psi_k(t)dt.$$

- Mais soit

$$J_k(\lambda) = \frac{J(\lambda)}{J'(\lambda_k)(\lambda - \lambda_k)}, k \geq 1.$$

- Alors, pour tout $k \geq 1$, $J_k \in \mathcal{H}^2$ et il existe $\psi_k \in L^2(0, \infty)$ telle que:

$$J_k(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \psi_k(t) dt.$$

- Comme

$$J_k(\lambda_l) = \delta_{kl},$$

la famille (ψ_k) est bien biorthogonale à la famille $\left(e^{-\lambda_k t}\right)$ et de plus

$$\|\psi_k\|_{L^2(0,\infty)} = \|J_k\|_{\mathcal{H}^2}.$$

- Or

$$\begin{aligned}\|J_k\|_{\mathcal{H}^2} &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{J(i\tau)}{J'(\lambda_k)(i\tau-\lambda_k)}\right|^2 d\tau\right)^{1/2} \\ &\underset{k\to\infty}{\sim} \frac{\|J\|_{\mathcal{H}^2}}{\lambda_k\,|J'(\lambda_k)|}\end{aligned}$$

.

- Or

$$\begin{aligned}\|J_k\|_{\mathcal{H}^2} &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{J(i\tau)}{J'(\lambda_k)(i\tau-\lambda_k)}\right|^2 d\tau\right)^{1/2} \\ &\underset{k\to\infty}{\sim} \frac{\|J\|_{\mathcal{H}^2}}{\lambda_k\,|J'(\lambda_k)|} \\ &.\end{aligned}$$

- Nous avons donc établi le

- Or

$$
\begin{aligned}
\|J_k\|_{\mathcal{H}^2} &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{J(i\tau)}{J'(\lambda_k)(i\tau-\lambda_k)}\right|^2 d\tau\right)^{1/2} \\
&\underset{k\to\infty}{\sim} \frac{\|J\|_{\mathcal{H}^2}}{\lambda_k |J'(\lambda_k)|}
\end{aligned}
$$

.

- Nous avons donc établi le

Théorème

Si la suite $\Lambda = (\lambda_k)$ est strictement croissante, telle que $\sum 1/\lambda_k < \infty$, alors il existe une famille $(\psi_k) \subset L^2(0,\infty)$ telle que

$$\int_0^\infty e^{-\lambda_k t} q_l(t)dt = \delta_{kl}, \;\; k, l \geq 1,$$

$$\|\psi_k\|_{L^2(0,\infty)} \underset{k\to\infty}{\sim} \frac{\|J\|_{\mathcal{H}^2}}{\lambda_k |J'(\lambda_k)|}.$$

Retour à un intervalle borné

- Soit $A(\Lambda; T) = \overline{\mathrm{Vect}\left\{e^{-\lambda_k t}, k \geq 1\right\}}^{L^2(0,T)}$. Alors, puisque $J(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\psi(t)dt : A(\Lambda; \infty) \subsetneq L^2(0, \infty)$.

Retour à un intervalle borné

- Soit $A(\Lambda; T) = \overline{\mathrm{Vect}\left\{e^{-\lambda_k t}, k \geq 1\right\}}^{L^2(0,T)}$. Alors, puisque $J(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\psi(t)dt$: $A(\Lambda; \infty) \subsetneq L^2(0, \infty)$.
- De plus:

- Soit $A\left(\Lambda; T\right) = \overline{\mathrm{Vect}\left\{e^{-\lambda_k t}, k \geq 1\right\}}^{L^2(0,T)}$. Alors, puisque $J(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\psi(t)dt : A\left(\Lambda; \infty\right) \subsetneq L^2\left(0, \infty\right)$.
- De plus:

Proposition

(L. Schwartz) L'application $R : A\left(\Lambda; \infty\right) \longrightarrow A\left(\Lambda; T\right)$ *définie par*

$$R\psi = \psi_{|(0,T)}$$

est un isomorphisme. En particulier:

$$\alpha \left\|\psi\right\|_{L^2(0,\infty)} \leq \left\|R\psi\right\|_{L^2(0,T)} \leq \beta \left\|\psi\right\|_{L^2(0,\infty)}$$

- On a: $R^* : A(\Lambda; T) \to A(\Lambda; \infty)$ et

$$\begin{aligned} \delta_{kj} &= \left(e^{-\lambda_k t}, \psi_j\right)_{L^2(0,\infty)} \\ &= \left(e^{-\lambda_k t}, R^* (R^*)^{-1} \psi_j\right)_{L^2(0,\infty)} \end{aligned}$$

- On a: $R^* : A(\Lambda; T) \to A(\Lambda; \infty)$ et

$$\begin{aligned} \delta_{kj} &= \left(e^{-\lambda_k t}, \psi_j\right)_{L^2(0,\infty)} \\ &= \left(e^{-\lambda_k t}, R^* \left(R^*\right)^{-1} \psi_j\right)_{L^2(0,\infty)} \end{aligned}$$

- On a: $R^* : A(\Lambda; T) \to A(\Lambda; \infty)$ et

$$\begin{aligned}
\delta_{kj} &= \left(e^{-\lambda_k t}, \psi_j\right)_{L^2(0,\infty)} \\
&= \left(e^{-\lambda_k t}, R^* \left(R^*\right)^{-1} \psi_j\right)_{L^2(0,\infty)} \\
&= \left(Re^{-\lambda_k t}, \left(\varrho^*\right)^{-1} \psi_j\right)_{L^2(0,T)}
\end{aligned}$$

- On a: $R^* : A(\Lambda; T) \to A(\Lambda; \infty)$ et

$$\begin{aligned}
\delta_{kj} &= \left(e^{-\lambda_k t}, \psi_j\right)_{L^2(0,\infty)} \\
&= \left(e^{-\lambda_k t}, R^* \left(R^*\right)^{-1} \psi_j\right)_{L^2(0,\infty)} \\
&= \left(Re^{-\lambda_k t}, \left(\varrho^*\right)^{-1} \psi_j\right)_{L^2(0,T)} \\
&= \left(e^{-\lambda_k t}, \left(R^*\right)^{-1} \psi_j\right)_{L^2(0,T)}
\end{aligned}$$

- La famille (q_k) qu'on cherche est donc donnée par $q_k = \left(\varrho^*\right)^{-1} \varphi_j$ et

$$\left\| q_k \right\|_{L^2(0,T)} \underset{k \to \infty}{\sim} \frac{\left\| J \right\|_{\mathcal{H}^2}}{\lambda_k \left| J'(\lambda_k) \right|}.$$

Indice de condensation d'une suite

- Puisque $\|q_k\|_{L^2(0,\infty)} \underset{k\to\infty}{\sim} \frac{\|J\|_{\mathcal{H}^2}}{\lambda_k |J'(\lambda_k)|}$, et que la solution formelle v du problème des moments est donnée par

$$v = -\sum_{k\geq 1} \frac{e^{-\lambda_k T}\,(y_0, \phi_k)}{(b, \phi_k)} q_k$$

il s'agit, pour la nature de la série, de comparer $\frac{1}{|J'(\lambda_k)|}$ à e^{λ_k}.

Indice de condensation d'une suite

- Puisque $\|q_k\|_{L^2(0,\infty)} \underset{k\to\infty}{\sim} \frac{\|J\|_{\mathcal{H}^2}}{\lambda_k |J'(\lambda_k)|}$, et que la solution formelle v du problème des moments est donnée par

$$v = -\sum_{k\geq 1} \frac{e^{-\lambda_k T}\left(y_0, \phi_k\right)}{\left(b, \phi_k\right)} q_k$$

il s'agit, pour la nature de la série, de comparer $\frac{1}{|J'(\lambda_k)|}$ à e^{λ_k}.

- On peut déjà noter que (après un simple calcul utilisant $\mathcal{B}(\lambda) = \prod_{l\geq 1} \frac{1-\lambda/\lambda_l}{1+\lambda/\lambda_l}$):

$$J'\left(\lambda_k\right) = \frac{\mathcal{B}'\left(\lambda_k\right)}{\left(1+\lambda_k\right)^2} = -\frac{1}{2\lambda_k\left(1+\lambda_k\right)^2} \prod_{j\neq k} \frac{1-\lambda_k/\lambda_j}{1+\lambda_k/\lambda_j}$$

Indice de condensation d'une suite

- Puisque $\|q_k\|_{L^2(0,\infty)} \underset{k\to\infty}{\sim} \frac{\|J\|_{\mathcal{H}^2}}{\lambda_k |J'(\lambda_k)|}$, et que la solution formelle v du problème des moments est donnée par

$$v = -\sum_{k\geq 1} \frac{e^{-\lambda_k T}\left(y_0, \phi_k\right)}{\left(b, \phi_k\right)} q_k$$

il s'agit, pour la nature de la série, de comparer $\frac{1}{|J'(\lambda_k)|}$ à e^{λ_k}.

- On peut déjà noter que (après un simple calcul utilisant $\mathcal{B}(\lambda) = \prod_{l\geq 1} \frac{1-\lambda/\lambda_l}{1+\lambda/\lambda_l}$):

$$J'\left(\lambda_k\right) = \frac{\mathcal{B}'\left(\lambda_k\right)}{\left(1+\lambda_k\right)^2} = -\frac{1}{2\lambda_k\left(1+\lambda_k\right)^2}\prod_{j\neq k}\frac{1-\lambda_k/\lambda_j}{1+\lambda_k/\lambda_j}$$

- On introduit donc la quantité:

$$c\left(\Lambda\right) = \overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{\ln \prod_{j\neq k}\left|\frac{1+\lambda_k/\lambda_j}{1-\lambda_k/\lambda_j}\right|}{\lambda_k}.$$

- On peut établir que $c(\Lambda) \in [0, \infty]$.

- On peut établir que $c(\Lambda) \in [0, \infty]$.

Définition

$c(\Lambda)$ *est appelé* **indice de condensation** *de la suite* $\Lambda = (\lambda_k)$.

- On peut établir que $c\left(\Lambda\right) \in \left[0, \infty\right]$.

Définition

$c\left(\Lambda\right)$ *est appelé* **indice de condensation** *de la suite* $\Lambda = \left(\lambda_k\right)$.

- C'est un nombre qui a été introduit par Vl. Bernstein en 1935 pour l'étude des séries de Dirichlet.

- On peut établir que $c(\Lambda) \in [0, \infty]$.

Définition

$c(\Lambda)$ *est appelé* **indice de condensation** *de la suite* $\Lambda = (\lambda_k)$.

- C'est un nombre qui a été introduit par Vl. Bernstein en 1935 pour l'étude des séries de Dirichlet.
- On a immédiatement:

$$\frac{1}{\lambda_k \left| J'(\lambda_k) \right|} \leq \frac{2(1+\lambda_k)^2}{\lambda_k} e^{c(\Lambda)\lambda_k}.$$

- On peut établir que $c(\Lambda) \in [0, \infty]$.

Définition

$c(\Lambda)$ est appelé **indice de condensation** *de la suite $\Lambda = (\lambda_k)$.*

- C'est un nombre qui a été introduit par Vl. Bernstein en 1935 pour l'étude des séries de Dirichlet.
- On a immédiatement:

$$\frac{1}{\lambda_k \left| J'(\lambda_k) \right|} \leq \frac{2(1+\lambda_k)^2}{\lambda_k} e^{c(\Lambda)\lambda_k}.$$

- Par suite, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $C_\varepsilon > 0$ telle que:

$$\frac{1}{\lambda_k \left| J'(\lambda_k) \right|} \leq C_\varepsilon e^{(c(\Lambda)+\varepsilon)\lambda_k}, \; k \geq 1.$$

- On peut établir que $c(\Lambda) \in [0, \infty]$.

Définition

$c(\Lambda)$ *est appelé* **indice de condensation** *de la suite* $\Lambda = (\lambda_k)$.

- C'est un nombre qui a été introduit par Vl. Bernstein en 1935 pour l'étude des séries de Dirichlet.
- On a immédiatement:

$$\frac{1}{\lambda_k |J'(\lambda_k)|} \leq \frac{2(1+\lambda_k)^2}{\lambda_k} e^{c(\Lambda)\lambda_k}.$$

- Par suite, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $C_\varepsilon > 0$ telle que:

$$\frac{1}{\lambda_k |J'(\lambda_k)|} \leq C_\varepsilon e^{(c(\Lambda)+\varepsilon)\lambda_k}, \ k \geq 1.$$

- Enfin:

$$\|q_k\|_{L^2(0,\infty)} \leq C_\varepsilon e^{(c(\Lambda)+\varepsilon)\lambda_k}, \ k \geq 1.$$

Conclusion: la contrôlabilité à zéro

- Nous voulions savoir si la fonction définie par $v = \sum_{k\geq 1} -\frac{e^{-\lambda_k T}(y_0,\phi_k)}{(b,\phi_k)} q_k$ est dans $L^2(0, T)$.

Conclusion: la contrôlabilité à zéro

- Nous voulions savoir si la fonction définie par $v = \sum_{k\geq 1} -\frac{e^{-\lambda_k T}(y_0,\phi_k)}{(b,\phi_k)} q_k$ est dans $L^2(0, T)$.
- Nous avions remarqué que c'était le cas dès lors que

$$\sum_{k\geq 1} e^{-\lambda_k T} \left| \frac{(y_0, \phi_k)}{(b, \phi_k)} \right| \|q_k\|_{L^2(0,T)} < \infty.$$

Conclusion: la contrôlabilité à zéro

- Nous voulions savoir si la fonction définie par $v = \sum_{k\geq 1} -\frac{e^{-\lambda_k T}(y_0,\phi_k)}{(b,\phi_k)} q_k$ est dans $L^2(0, T)$.
- Nous avions remarqué que c'était le cas dès lors que

$$\sum_{k\geq 1} e^{-\lambda_k T} \left| \frac{(y_0, \phi_k)}{(b, \phi_k)} \right| \|q_k\|_{L^2(0,T)} < \infty.$$

- Avec l'estimation que nous venons d'établir, il suffit que

$$\sum_{k\geq 1} \left| \frac{(y_0, \phi_k)}{(b, \phi_k)} \right| e^{-\lambda_k (T - c(\Lambda) + \varepsilon)} < \infty, \ \forall \varepsilon > 0.$$

- Nous venons donc d'établir que:

- Nous venons donc d'établir que:

Théorème

Si $(b, \phi_k) \neq 0$ *pour tout* $k \geq 1$ *et si*

$$\sum_{k \geq 1} \left| \frac{(y_0, \phi_k)}{(b, \phi_k)} \right| e^{-\lambda_k (T - c(\Lambda) - \varepsilon)} < \infty, \ \forall \varepsilon > 0,$$

alors le problème (1) est contrôlable à zéro.

- Nous venons donc d'établir que:

Théorème

Si $(b, \phi_k) \neq 0$ *pour tout* $k \geq 1$ *et si*

$$\sum_{k \geq 1} \left| \frac{(y_0, \phi_k)}{(b, \phi_k)} \right| e^{-\lambda_k (T - c(\Lambda) - \varepsilon)} < \infty, \ \forall \varepsilon > 0,$$

alors le problème (1) est contrôlable à zéro.

- Sur l'indice de condensation, on a

- Nous venons donc d'établir que:

Théorème

Si $(b, \phi_k) \neq 0$ *pour tout* $k \geq 1$ *et si*

$$\sum_{k\geq 1} \left| \frac{(y_0, \phi_k)}{(b, \phi_k)} \right| e^{-\lambda_k (T - c(\Lambda) - \varepsilon)} < \infty, \ \forall \varepsilon > 0,$$

alors le problème (1) est contrôlable à zéro.

- Sur l'indice de condensation, on a

Proposition

Si $\lambda_{k+1} - \lambda_k \geq \sigma > 0$ *alors* $c(\Lambda) = 0$.

Une application

- Un exemple simple:

$$\left\{\begin{array}{ll} y' = y_{xx} + b(x)u(t), & Q_T := (0,T)\times(0,\pi) \\ y_{|x=0} = y_{|x=\pi} = 0, & (0,T) \\ y_{|t=0} = y_0, & (0,\pi)\,. \end{array}\right.$$

Une application

- Un exemple simple:

$$\left\{\begin{array}{ll} y' = y_{xx} + b(x)u(t), & Q_T := (0,T)\times(0,\pi) \\ y_{|x=0} = y_{|x=\pi} = 0, & (0,T) \\ y_{|t=0} = y_0, & (0,\pi)\,. \end{array}\right.$$

- Ici:

$$\phi_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin kx,\ \ \lambda_k = k^2.$$

Une application

- Un exemple simple:

$$\begin{cases} y' = y_{xx} + b(x)u(t), & Q_T := (0, T) \times (0, \pi) \\ y_{|x=0} = y_{|x=\pi} = 0, & (0, T) \\ y_{|t=0} = y_0, & (0, \pi) \, . \end{cases}$$

- Ici:

$$\phi_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin kx, \ \ \lambda_k = k^2.$$

- D'où, si par exemple $b = 1$ dans $(0, \pi)$, alors $(b, \phi_k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1-(-1)^k}{k}$. Dans ce cas, pas de contrôlabilité du tout!

Une application

- Un exemple simple:

$$\begin{cases} y' = y_{xx} + b(x)u(t), & Q_T := (0,T) \times (0,\pi) \\ y_{|x=0} = y_{|x=\pi} = 0, & (0,T) \\ y_{|t=0} = y_0, & (0,\pi)\,. \end{cases}$$

- Ici:

$$\phi_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin kx,\ \ \lambda_k = k^2.$$

- D'où, si par exemple $b = 1$ dans $(0,\pi)$, alors $(b, \phi_k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1-(-1)^k}{k}$. Dans ce cas, pas de contrôlabilité du tout!
- Si $b(x) = x$, alors $|(b,\phi_k)| = \frac{\sqrt{2\pi}}{k}$ et $c(\Lambda) = 0$: contrôlabilité à zéro et approchée pour tout $T > 0$.