
EXERCICES CORRIGÉS DE DISTRIBUTIONS

DJAMILA HAMROUN ¹

1. Laboratoire AMNEDP, Faculté de Mathématiques, USTHB. Email : djamroun@yahoo.fr

PRÉSENTATION

Cet ouvrage est un recueil d'exercices avec leurs solutions détaillées sur les distributions et les transformations de Fourier et de Laplace. Il est le fruit de l'enseignement des modules Distributions I et II, en première année Master de la spécialité EDP à la faculté de Mathématiques de l'USTHB, dispensé durant les années 2016 - 2021. Il m'a paru utile de rappeler les principales définitions et résultats indispensables pour la résolution de ces exercices.

J'aimerais remercier chaleureusement Mme Ferroudja Smadhi et M. Dahmane Dechicha pour leur aide précieuse dans la préparation de ce document, ainsi que tous les étudiants qui ont suivi mes cours et TD sur les distributions et qui les ont enrichi par leurs remarques.

Djamila Hamroun

BIBLIOGRAPHIE

J.M. Bony, *Cours d'analyse, Théorie des distributions et analyse de Fourier, Editions de l'Ecole Polytechnique, 2001.*

L. Schwartz, *Théorie des distributions, Hermann, Paris 1966.*

L. Schwartz, *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques, Hermann, Paris 1966.*

M. Tucsna, *Distributions et équations fondamentales de la physique,*
[http ://www.iecl.univ-lorraine.fr/ Marius.Tucsna/coursdibpol.pdf](http://www.iecl.univ-lorraine.fr/Marius.Tucsna/coursdibpol.pdf).

C. Zuily, *Eléments de distributions et d'équations aux dérivées partielles, Cours et problèmes résolus, Dunod, Paris 2002.*

NOTATIONS UTILISÉES

Notation	Description
$\cdot$	<i>produit scalaire de $\mathbb{R}^N$</i>
$ \cdot $	<i>norme euclidienne de $\mathbb{R}^N$</i>
x^α	$x_1^{\alpha_1} \cdots x_N^{\alpha_N}$, $x \in \mathbb{R}^N$, $\alpha \in \mathbb{N}^N$
$\alpha!$	$\alpha_1! \cdots \alpha_N!$, $\alpha \in \mathbb{N}^N$
∇	<i>le gradient</i>
Δ	<i>le laplacien</i>
$\mathcal{C}_n^k$	$\frac{n!}{k!(n-k)!}$, $k, n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$
$\mathcal{C}_\alpha^\beta$	$\frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}$ $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^N$, $\beta \leq \alpha$ <i>c'est-à-dire $\beta_i \leq \alpha_i$, $i = 1, \dots, N$</i>
$\partial^\alpha f$	$\frac{\partial^{ \alpha } f}{\partial \alpha_1 \dots \partial \alpha_N}$, $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{N}^N$
$f^{(k)}$	<i>dérivée d'ordre k de la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$</i>
$*$	<i>produit de convolution</i>
$\otimes$	<i>produit tensoriel</i>
S^{N-1}	<i>sphère unité de $\mathbb{R}^N$</i>
$B(x_0, r)$	<i>boule ouverte de centre $x_0 \in \mathbb{R}^N$ et de rayon $r > 0$</i>
$\mathcal{C}_\Omega^A$, $\Omega \setminus A$, A^c	<i>complémentaire de $A \subset \Omega$ dans Ω</i>

$\overline{A}$	<i>adhérence de A dans $\mathbb{R}^N$</i>
$\overset{\circ}{A}$	<i>intérieur de A dans $\mathbb{R}^N$</i>
$A + B$	$\{a + b; a \in A, b \in B\}, \quad A, B \subset \mathbb{R}^N$
$\partial\Omega$	<i>le bord de Ω</i>
ν	<i>la normale au bord unitaire et sortante</i>
$\frac{\partial}{\partial\nu}$	<i>dérivée normale</i>
$ \Omega , \text{mes}(\Omega)$	<i>la mesure (de Lebesgue) de Ω</i>
1_Ω	<i>la fonction caractéristique de Ω</i>
H	<i>la fonction de Heaviside $H = 1_{]0, +\infty[}$</i>
$\text{sgn}(x)$	<i>signe de x, $x \in \mathbb{R}^\star$</i>
$\overset{\vee}{u}(x)$	$u(-x)$
$\tau_a u(x)$	$u(x - a)$
$\pi_\lambda u(x)$	$u(\frac{x}{\lambda}), \lambda \in \mathbb{R}^\star$
$\text{Supp } u$	<i>support de u</i>
$\ \cdot\ _X$	<i>la norme dans l'espace X</i>
$\mathcal{C}(\Omega) = \mathcal{C}^0(\Omega)$	<i>espace des fonctions $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ continues</i>
$\mathcal{C}_c(\Omega)$	<i>espace des fonctions $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ à support compact dans Ω</i>
$\mathcal{C}^k(\Omega)$	<i>espace des fonctions k fois continûment différentiables</i>
$\mathcal{C}_c^k(\Omega)$	$\mathcal{C}^k(\Omega) \cap \mathcal{C}_c(\Omega)$
$\mathcal{E}(\Omega) = \mathcal{C}^\infty(\Omega)$	<i>espace des fonctions indéfiniment différentiables</i>
$\mathcal{D}(\Omega)$	<i>espace des fonctions $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ à support compact dans Ω</i>
$\mathcal{D}_K(\Omega)$	<i>espace des fonctions $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ à support dans le compact $K \subset \Omega$</i>
$\mathcal{D}'(\Omega)$	<i>dual de $\mathcal{D}(\Omega)$: espace des distributions sur Ω</i>
$\mathcal{E}'(\Omega)$	<i>dual de $\mathcal{E}(\Omega)$: espace des distributions sur Ω, à support compact</i>
δ_a	<i>mesure de Dirac au point $a \in \mathbb{R}^N$</i>
$\mathcal{D}'_+$	<i>espace des distributions sur $\mathbb{R}$, à support dans $[0, +\infty[$</i>

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$	espace des fonctions indéfiniment différentiables, à décroissance rapide ainsi que leurs dérivées
$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$	dual de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$: espace des distributions tempérées sur $\mathbb{R}^N$
$\mathcal{O}_M(\mathbb{R}^N)$	espace des fonctions indéfiniment différentiables, à croissance lente ainsi que leurs dérivées
$\mathcal{F}$	transformation de Fourier : $\hat{f} = \mathcal{F}(f)$
$\mathcal{L}$	transformation de Laplace
$p.p.$	presque partout
$L^p(\Omega)$	espace de Lebesgue
$L^p_{loc}(\Omega)$	espace de Lebesgue des fonctions localement intégrables
$\ \cdot\ _p$	norme dans $L^p(\Omega)$
$Re\, z$	partie réelle du nombre complexe z
$Im\, z$	partie imaginaire du nombre complexe z
Π_a	ensemble des nombres complexes z ; $Re\, z > a$, $a \in \mathbb{R}$
$Res(f, z)$	résidu de la fonction f au point z .

Pour finir, nous rappelons la formule de Taylor et la formule de Leibnitz.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$.

Formule de Taylor (avec reste intégral) : Soient $m \in \mathbb{N}$, $a \in \Omega$ et $f \in \mathcal{C}^{m+1}(\Omega)$. Pour $x \in \Omega$ tel que le segment $[a, x] \subset \Omega$ (c'est-à-dire $a + t(x - a) \in \Omega$, $\forall t \in [0, 1]$), on a

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{\partial^\alpha f(a)}{\alpha!} (x - a)^\alpha + (m + 1) \sum_{|\alpha| = m+1} \frac{(x - a)^\alpha}{\alpha!} \int_0^1 (1 - t)^m \partial^\alpha f(a + t(x - a)) dt.$$

En particulier, en dimension 1, la formule s'écrit

$$f(x) = \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + \frac{(x - a)^{m+1}}{m!} \int_0^1 (1 - t)^m f^{(m+1)}(a + t(x - a)) dt.$$

Formule de Leibnitz : Soient $f, g \in \mathcal{C}^m(\Omega)$ alors $fg \in \mathcal{C}^m(\Omega)$ et pour $\alpha \in \mathbb{N}^N$ tel que $|\alpha| \leq m$, on a

$$\partial^\alpha (fg) = \sum_{\beta \leq \alpha} \mathcal{C}_\alpha^\beta \partial^\beta f \partial^{\alpha-\beta} g.$$

TABLE DES MATIÈRES

1	<i>Intégration</i>	1
1.1	<i>Rappel de cours</i>	1
1.1.1	<i>Théorème de convergence dominée de Lebesgue dans L^1</i>	1
1.1.2	<i>Théorèmes de Fubini et Tonelli</i>	2
1.1.3	<i>Inégalité de Hölder</i>	2
1.1.4	<i>Théorème de Lebesgue des intégrales dépendant d'un paramètre</i>	2
1.1.5	<i>Support d'une fonction</i>	3
1.1.6	<i>Convolution des fonctions, inégalité de Young, dérivation</i>	3
1.1.7	<i>Un résultat de densité</i>	3
1.2	<i>Enoncé des exercices</i>	4
1.3	<i>Solutions</i>	7
2	<i>Les distributions</i>	24
2.1	<i>Rappel de cours</i>	24
2.1.1	<i>Les fonctions test</i>	24
2.1.2	<i>Les distributions</i>	25
2.1.3	<i>Opérations sur les distributions</i>	27
2.2	<i>Enoncé des exercices</i>	32

2.3	<i>Solutions</i>	38
3	<i>Convolution des distributions</i>	86
3.1	<i>Rappel de cours</i>	86
3.1.1	<i>Support d'une distribution. Localisation et recollement de distributions</i>	86
3.1.2	<i>Distributions à supports compacts</i>	87
3.1.3	<i>Produit tensoriel de distributions</i>	88
3.1.4	<i>Convolution de distributions</i>	88
3.1.5	<i>Algèbres de convolution</i>	90
3.2	<i>Enoncé des exercices</i>	92
3.3	<i>Solutions</i>	96
4	<i>La transformation de Fourier</i>	123
4.1	<i>Rappel de cours</i>	123
4.1.1	<i>Les distributions tempérées</i>	123
4.1.2	<i>Transformation de Fourier (T.F.) des fonctions</i>	125
4.1.3	<i>Transformation de Fourier des distributions</i>	127
4.1.4	<i>T.F. des distributions et convolution</i>	127
4.1.5	<i>Séries de Fourier des distributions périodiques</i>	128
4.2	<i>Enoncé des exercices</i>	131
4.3	<i>Solutions</i>	136
5	<i>La transformation de Laplace</i>	174
5.1	<i>Rappel de cours</i>	174
5.1.1	<i>Transformation de Laplace (T.L.) des fonctions</i>	174
5.1.2	<i>T.L. des distributions</i>	175
5.1.3	<i>Propriétés de la T. L.</i>	176
5.1.4	<i>Inversion de la T.L.</i>	176
5.2	<i>Enoncé des exercices</i>	179
5.3	<i>Solutions</i>	181

CHAPITRE

1

INTÉGRATION

Les espaces L^p , le théorème de Fubini, le théorème de convergence dominée de Lebesgue, le théorème de Lebesgue pour les intégrales dépendant d'un paramètre, la convolution des fonctions, le support d'une fonction mesurable.

1.1 Rappel de cours

Nous supposons que le lecteur est familier avec les espaces de Lebesgue L^p et nous rappelons quelques résultats fondamentaux, d'usage courant dans ce polycopié.

Dans toute la suite Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^N$.

1.1.1 Théorème de convergence dominée de Lebesgue dans L^1

Théorème 1.1. *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $L^1(\Omega)$ telle que $(f_n)_n$ converge presque partout sur Ω vers une fonction f . On suppose de plus qu'il existe une fonction $g \in L^1(\Omega)$ telle que pour chaque n*

$$|f_n(x)| \leq g(x) \text{ p.p. sur } \Omega.$$

Alors $f \in L^1(\Omega)$ et $(f_n)_n$ converge vers f dans $L^1(\Omega)$. En particulier

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(x) dx = \int_{\Omega} f(x) dx.$$

1.1.2 Théorèmes de Fubini et Tonelli

Soient Ω' un ouvert de $\mathbb{R}^{N'}$ et $F : (x, y) \in \Omega \times \Omega' \mapsto F(x, y)$ une fonction mesurable. Nous avons

Théorème 1.2 (de Fubini-Tonelli). Si F est positive alors

$$\iint_{\Omega \times \Omega'} F(x, y) dx dy = \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega'} F(x, y) dy \right) dx = \int_{\Omega'} \left(\int_{\Omega} F(x, y) dx \right) dy.$$

Théorème 1.3 (de Tonelli). Si $\int_{\Omega'} |F(x, y)| dy < \infty$ pour presque tout $x \in \Omega$ et si $\int_{\Omega} \left(\int_{\Omega'} |F(x, y)| dy \right) dx < \infty$ alors $F \in L^1(\Omega \times \Omega')$.

Théorème 1.4 (de Fubini). Si $F \in L^1(\Omega \times \Omega')$ alors $\int_{\Omega'} |F(x, y)| dy < \infty$ pour presque tout $x \in \Omega$ et $\int_{\Omega} |F(x, y)| dx < \infty$ pour presque tout $y \in \Omega'$ et de plus

$$\iint_{\Omega \times \Omega'} F(x, y) dx dy = \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega'} F(x, y) dy \right) dx = \int_{\Omega'} \left(\int_{\Omega} F(x, y) dx \right) dy.$$

1.1.3 Inégalité de Hölder

Théorème 1.5 (Inégalité de Hölder). Soient $1 \leq p \leq \infty$ et p' l'exposant conjugué de p (qui réalise $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, avec la convention $\frac{1}{\infty} = 0$). Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^{p'}(\Omega)$ alors $fg \in L^1(\Omega)$ et

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Lorsque $p = 2$ alors $p' = 2$ et l'inégalité est dite de **Cauchy-Schwarz**.

1.1.4 Théorème de Lebesgue des intégrales dépendant d'un paramètre

Théorème 1.6. Soient Ω' un ouvert de $\mathbb{R}^{N'}$ et $F : (t, x) \in \Omega' \times \Omega \mapsto F(t, x)$ une fonction telle que

- i) Pour presque tout $t \in \Omega'$, la fonction $x \mapsto F(t, x)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur Ω , ($k \in \mathbb{N}$)
- ii) Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^N$ tel que $|\alpha| \leq k$, il existe une fonction $g_{\alpha} \in L^1(\Omega')$ telle que pour tout $x \in \Omega$

$$|\partial_x^{\alpha} F(t, x)| \leq g_{\alpha}(t), \quad \text{pour presque tout } t \in \Omega'.$$

Alors la fonction f définie sur Ω par $f(x) = \int_{\Omega'} F(t, x) dt$ est de classe $\mathcal{C}^k$ et de plus

$$\partial^{\alpha} f(x) = \int_{\Omega'} \partial_x^{\alpha} F(t, x) dt, \quad |\alpha| \leq k.$$

1.1.5 Support d'une fonction

Définition 1.1. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable, le support de f noté $\text{Supp } f$ est le complémentaire dans Ω du plus grand ouvert ω_f sur lequel f est nulle presque partout. ω_f s'appelle l'ouvert d'annulation de f et $\text{Supp } f = \Omega \setminus \omega_f$.

Dans le cas où f est une fonction continue, alors

$$\text{Supp } f = \overline{\{x \in \Omega; f(x) \neq 0\}}.$$

1.1.6 Convolution des fonctions, inégalité de Young, dérivation

Soient $f, g : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions. Leur convolution, lorsqu'elle est définie est la fonction $f * g$ donnée sur $\mathbb{R}^N$ par

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y) dy = \int_{\mathbb{R}^N} f(y)g(x-y) dy.$$

Théorème 1.7 (Inégalité de Young). Soient $1 \leq p, q \leq \infty$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 = \frac{1}{r} \geq 0$. Si $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^N)$ alors $f * g \in L^r(\mathbb{R}^N)$ et

$$\|f * g\|_{L^r(\mathbb{R}^N)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}.$$

Théorème 1.8. Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ et $g \in \mathcal{C}_c^k(\mathbb{R}^N)$ alors $f * g \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^N)$ et

$$\partial^\alpha(f * g) = f * \partial^\alpha g, \quad \alpha \in \mathbb{N}^N, |\alpha| \leq k.$$

1.1.7 Un résultat de densité

Théorème 1.9. Soit $1 \leq p < \infty$, $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$, c'est-à-dire

$$\forall f \in L^p(\Omega), \forall \varepsilon > 0, \exists g \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega); \|f - g\|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon.$$

En particulier $\mathcal{C}_c^k(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Attention, ce résultat est faux dans $L^\infty(\Omega)$.

1.2 Énoncé des exercices

Exercice 1.1. Soit $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$. Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-nx^2} dx$.

Exercice 1.2. Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ où $I_n = \frac{n}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos x e^{-x^2}}{1 + n^2 x^2} dx$.

Exercice 1.3. 1. Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{x^n}{1 + x^n} e^{-x} dx$.

2. Soit $f \in L^p(]0, 1[)$, $1 \leq p \leq \infty$. Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^n f(x) dx$.

Exercice 1.4. Soit $p, q \in [1, +\infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et soit $(f_n)_n \subset L^p(\Omega)$ et $(g_n)_n \subset L^q(\Omega)$ telles que $f_n \rightarrow f$ dans $L^p(\Omega)$ et $g_n \rightarrow g$ dans $L^q(\Omega)$. Montrer que $f_n g_n \rightarrow fg$ dans $L^1(\Omega)$.

Exercice 1.5. Soit $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[$ et $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$, $(x, y) \in \Omega$.

Calculer $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dx \right) dy$ et $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dy \right) dx$. Que peut-on conclure ?

Reprendre la question pour les fonctions f dans les cas suivants

$$f(x, y) = \frac{xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \quad f(x, y) = \frac{\operatorname{sgn}(x - y)}{\max(x, y)},$$

où sgn désigne la fonction signe : $\operatorname{sgn}(x) = 1$ si $x > 0$ et $\operatorname{sgn}(x) = -1$ si $x < 0$.

Exercice 1.6. 1. Soit $\Omega =]0, +\infty[\times]0, +\infty[$, on pose

$$I = \iint_{\Omega} x e^{-x^2(1+y^2)} dx dy \quad \text{et} \quad J = \int_0^\infty e^{-x^2} dx.$$

Calculer I de deux manières différentes et en déduire la valeur de J .

2. Calculer l'intégrale $\iint_D e^{-x} \sin(xy) dx$ où $D =]0, +\infty[\times]0, 1[$ puis en déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^\infty \frac{1 - \cos x}{x} e^{-x} dx$.

Exercice 1.7. 1. Calculer l'intégrale $\iint_D \frac{dx dy}{(1+y)(1+x^2 y)}$ où $D =]0, +\infty[^2$ puis en déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2 - 1} dx$.

2. En remarquant que $\frac{\sin x}{x} = \int_0^1 \cos(xy) dy$, calculer l'intégrale $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-x} dx$.

Exercice 1.8. Soit pour $t > 0$, l'intégrale $I(t) = \iint_{D_t} \sin x e^{-xy} dx dy$ où $D_t =]0, t[\times]0, +\infty[$. Montrer que $I(t)$ est bien définie puis déterminer la valeur de l'intégrale $J = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$, en utilisant $I(t)$.

Exercice 1.9. Soit $f(x) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{Arctg}(ux)}{u(1+u^2)} du$.

1. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}$ puis étudier sa continuité et sa dérivabilité en utilisant le théorème de Lebesgue. En déduire les valeurs de f sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^\infty \left(\frac{\text{Arctg } t}{t}\right)^2 dt$. (Indication : on pourra utiliser une intégration par parties).

Exercice 1.10. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ avec $1 \leq p < q \leq \infty$ et soit r un réel compris strictement entre p et q de sorte que

$$\exists \theta \in]0, 1[; \quad \frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}.$$

1. Montrer que $f \in L^r(\Omega)$ et $\|f\|_r \leq \|f\|_p^\theta \|f\|_q^{1-\theta}$.
2. Soit la suite $(f_n)_n \subset L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ telle que $(f_n)_n$ converge dans $L^p(\Omega)$ vers f . On suppose de plus que $(f_n)_n$ est bornée dans $L^q(\Omega)$ et $f \in L^q(\Omega)$. Montrer que $(f_n)_n$ converge dans $L^r(\Omega)$.

Exercice 1.11. Dans chacun des cas suivants, trouver les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ pour lesquelles l'intégrale est convergente

$$\int_{|x|<1} \frac{dx}{|x|^\alpha}, \quad \int_{|x|>1} \frac{dx}{|x|^\alpha}, \quad \int_{\mathbb{R}^N} \frac{dx}{(1+|x|)^\alpha}.$$

Exercice 1.12. Soit $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f * g$ est définie sur $\mathbb{R}$.

1. Étudier la parité de $f * g$ selon celles de f et g .
2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$, on suppose que f est symétrique par rapport à la droite $x = a$ (c'est-à-dire $f(a+x) = f(a-x)$, $x \in \mathbb{R}$) et g est symétrique par rapport à la droite $x = b$. Montrer que $f * g$ est symétrique par rapport à la droite $x = a + b$.
3. Déterminer $1_{[-1,1]} * 1_{[-1,1]}$ et $1_{[0,1]} * 1_{[0,1]}$.

Exercice 1.13. Soit $f_a(x) = e^{-ax^2}$, $x \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $f_a * f_b$ est bien définie pour $a, b > 0$ et déterminer-la.

Exercice 1.14. Soit $f(x) = e^{-x}H(x)$ et $g(x) = e^xH(-x)$, $x \in \mathbb{R}$, où $H = 1_{]0, +\infty[}$ est la fonction de Heaviside. Montrer que la fonction $f * g$ est bien définie et déterminer-la.

Exercice 1.15. Soient $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions mesurables sur l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Montrer que

$$\text{Supp}(fg) \subset \text{Supp } f \cap \text{Supp } g \quad \text{et} \quad \text{Supp}(f+g) \subset \text{Supp } f \cup \text{Supp } g.$$

Exercice 1.16. Soient $f, g : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions mesurables telles que $f * g$ est définie.

1. Montrer que $\text{Supp}(f * g) \subset \overline{\text{Supp } f + \text{Supp } g}$.

2. Montrer que si les deux supports sont compacts alors $\text{Supp}(f * g)$ aussi et dans ce cas on écrit

$$\text{Supp}(f * g) \subset \text{Supp } f + \text{Supp } g.$$

Exercice 1.17. Soient $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions définies par

$$f = e^{-\frac{1}{x}} H, \quad g = \exp\left(\frac{1}{x^2 - 1}\right) 1_{]-1, 1[},$$

où $H = 1_{]0, +\infty[}$ est la fonction de Heaviside.

1. Montrer que $f, g \in C^\infty(\mathbb{R})$ et déterminer leurs supports (exprimer g en fonction de f).
2. En déduire deux fonctions $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ telles que $\text{supp } \varphi = \overline{B(0, 1)}$ et $\text{supp } \psi = \overline{B(x_0, r)}$ où $x_0 \in \mathbb{R}^N$ et $r > 0$.

Exercice 1.18. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, montrer en utilisant un résultat de densité que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{inx} dx = 0.$$

Exercice 1.19. Soit $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$. Montrer en utilisant un résultat de densité que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|f - f(\cdot + h)\|_p = 0.$$

Ce résultat reste-t-il vrai pour $p = \infty$?

1.3 Solutions

Solution 1.1. On pose $f_n(x) = f(x)e^{-nx^2}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est le produit de la fonction mesurable f par la fonction continue e^{-nx^2} donc elle est mesurable et on a

$$f_n(x) = f(x)e^{-nx^2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0, \quad \text{si } x \neq 0,$$

donc $(f_n)_n$ converge vers 0 p.p. sur $\mathbb{R}$. De plus pour p. p. $x \in \mathbb{R}$

$$|f_n(x)| \leq |f(x)|, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

▷ Considérons d'abord le cas $p = 1$. En vertu du théorème de convergence dominée de Lebesgue, on voit que $f_n \rightarrow 0$ dans $L^1(\mathbb{R})$ et donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = 0.$$

▷ Dans le cas $1 < p \leq \infty$, notons q le conjugué de p : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, comme $e^{-nx^2} \in L^q(\mathbb{R})$, alors l'inégalité de Hölder entraîne que $(f_n)_n \subset L^1(\mathbb{R})$ et

$$\int_{\mathbb{R}} |f_n(x)| dx \leq \|f\|_p \|e^{-nx^2}\|_q, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

On a $1 \leq q < \infty$ et

$$\|e^{-nx^2}\|_q^q = \int_{\mathbb{R}} e^{-nqx^2} dx = \frac{1}{\sqrt{nq}} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \|e^{-nx^2}\|_q = 0$. Ainsi $f_n \rightarrow 0$ dans $L^1(\mathbb{R})$ et donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx = 0.$$

Solution 1.2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on effectue le changement de variable $y = nx$ dans I_n et on obtient

$$I_n = \frac{n}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos x e^{-x^2}}{1 + n^2 x^2} dx = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} f_n(y) dy,$$

où

$$f_n(y) = \frac{\cos \frac{y}{n} e^{-\frac{y^2}{n^2}}}{1 + y^2}, \quad y \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

On a

$$|f_n(y)| \leq \frac{1}{1 + y^2}, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \text{avec } \frac{1}{1 + y^2} \in L^1(\mathbb{R}),$$

donc $(f_n)_n \subset L^1(\mathbb{R})$ et comme $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(y) = \frac{1}{1 + y^2}$ alors d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on conclut que $f_n \rightarrow 0$ dans $L^1(\mathbb{R})$ et en particulier

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(y) dy = \int_{\mathbb{R}} \frac{dy}{1 + y^2} = \pi.$$

Ainsi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 1.$$

Solution 1.3. 1) Soit $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n} e^{-x}$, $x \in \Omega =]0, +\infty[$. f_n est une fonction mesurable pour chaque $n \in \mathbb{N}$ et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < x < 1, \\ e^{-x} & \text{si } x > 1, \end{cases}$$

donc

$$f_n \longrightarrow f \text{ p.p. sur } \Omega.$$

De plus

$$0 \leq f_n(x) \leq e^{-x}, \quad x \in \Omega, \quad n \in \mathbb{N},$$

et comme $e^{-x} \in L^1(\Omega)$ on conclut que $(f_n)_n \subset L^1(\Omega)$ et d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f$ dans $L^1(\Omega)$. En particulier

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(x) dx = \int_{\Omega} f(x) dx = \int_1^{+\infty} e^{-x} dx = e^{-1}.$$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x^n \in \mathcal{C}([0, 1]) \subset L^q([0, 1])$, $1 \leq q \leq \infty$, de sorte que d'après l'inégalité de Hölder $x^n f \in L^1([0, 1])$ (et donc l'intégrale $\int_0^1 x^n f(x) dx$ existe) et de plus

$$\int_0^1 |x^n f(x)| dx \leq \|f\|_{L^p([0, 1])} \|x^n\|_{L^q([0, 1])}, \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1.$$

Nous distinguons alors deux cas :

▷ Si $p > 1$ alors $q < \infty$ et $\|x^n\|_{L^q([0, 1])} = \left(\frac{1}{nq+1}\right)^{\frac{1}{q}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^n f(x) dx = 0.$$

▷ Si $p = 1$, alors $q = \infty$ et $\|x^n\|_{L^\infty([0, 1])} = 1$ mais clairement

$$x^n f \longrightarrow 0 \text{ p.p. sur }]0, 1[,$$

et

$$|x^n f(x)| \leq |f(x)|, \quad \text{p.p. } x \in]0, 1[, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

donc le théorème de convergence dominée de Lebesgue entraîne que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^n f(x) dx = 0.$$

Solution 1.4. On écrit

$$f_n g_n - f g = (f_n - f) g_n + f (g_n - g),$$

et on applique l'inégalité triangulaire ainsi que l'inégalité de Hölder pour obtenir

$$\|f_n g_n - f g\|_1 \leq \|f_n - f\|_p \|g_n\|_q + \|f\|_p \|g_n - g\|_q.$$

Par hypothèse, $\lim_{n \rightarrow 0} \|f_n - f\|_p = 0$ et $\lim_{n \rightarrow 0} \|g_n - g\|_q = 0$, donc la suite $(\|g_n\|_q)_n$ est bornée et chaque terme du second membre de l'inégalité précédente tend vers 0, ce qui entraîne que

$$\lim_{n \rightarrow 0} \|f_n g_n - f g\|_1 = 0.$$

Solution 1.5. 1) On a

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dx \right) dy &= \int_0^1 \left(\int_0^1 -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) dx \right) dy \\ &= \int_0^1 -\frac{x}{x^2 + y^2} \Big|_{x=0}^{x=1} dy = - \int_0^1 \frac{1}{1 + y^2} dy \\ &= -\text{Arctg } y \Big|_0^1 = -\frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Comme $f(x, y) = -f(y, x)$, $(x, y) \in \Omega$, alors

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dy \right) dx = \frac{\pi}{4} \neq \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dx \right) dy,$$

donc $f \notin L^1(\Omega)$.

2) Soit maintenant $f(x, y) = \frac{xy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$, $(x, y) \in \Omega$.

Comme $f(x, y) \geq 0$, $\forall (x, y) \in \Omega$, alors d'après le théorème de Fubini-Tonelli

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dx \right) dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dy \right) dx = \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy.$$

Calculons la première intégrale :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dx \right) dy &= \int_0^1 \left(\int_0^1 -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) dx \right) dy \\ &= \int_0^1 \left(1 - \frac{y}{\sqrt{1 + y^2}} \right) dy = 2 - \sqrt{2}. \end{aligned}$$

On conclut que $f \in L^1(\Omega)$ et

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = 2 - \sqrt{2}.$$

3) Soit $f(x, y) = \frac{\text{sgn}(x-y)}{\max(x, y)}$ pour $(x, y) \in \Omega$. On a $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x > y, \\ -\frac{1}{y} & \text{si } x < y, \end{cases}$ donc

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dx \right) dy = \int_0^1 \left(\int_0^y -\frac{1}{y} dx + \int_y^1 \frac{1}{x} dx \right) dy = -\int_0^1 (1 + \ln y) dy = 0,$$

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^x \frac{1}{x} dy + \int_x^1 -\frac{1}{y} dy \right) dx = \int_0^1 (1 + \ln x) dx = 0.$$

Les deux intégrales sont donc égales mais étant donné que f ne garde pas un signe constant sur Ω , on ne peut rien conclure sur l'intégrabilité de f sur Ω . Un calcul direct donne

$$\iint_{\Omega} |f(x, y)| dx dy = \int_0^1 \left(\int_0^y \frac{1}{y} dx + \int_y^1 \frac{1}{x} dx \right) dy = \int_0^1 (1 - \ln y) dy = 2,$$

de sorte que $f \in L^1(\Omega)$.

Solution 1.6. 1) $I = \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$ où $f(x, y) = xe^{-x^2(1+y^2)}$, $(x, y) \in \Omega$.

f est une fonction mesurable et positive sur Ω , donc en vertu du théorème de Fubini-Tonelli

$$I = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} f(x, y) dx \right) dy = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} f(x, y) dy \right) dx.$$

Donc d'une part

$$\begin{aligned} I = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} xe^{-x^2(1+y^2)} dx \right) dy &= -\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2(1+y^2)}}{1+y^2} \Big|_0^{+\infty} dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{dy}{1+y^2} = \frac{\pi}{4}, \end{aligned}$$

et d'autre part

$$I = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} xe^{-x^2(1+y^2)} dy \right) dx = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \left(\int_0^{+\infty} xe^{-x^2 y^2} dy \right) dx.$$

Pour x fixé dans $]0, +\infty[$, en calculant $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2 y^2} dy$ à l'aide du changement de variable $t = xy$, on trouve

$$I = \left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \right) \left(\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \right) = J^2.$$

Par conséquent, comme $J > 0$, alors

$$J = \sqrt{I} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

2) Soit $K = \iint_D g(x, y) dx dy$ où $g(x, y) = e^{-x} \sin(xy)$, $(x, y) \in D$.

g est une fonction continue sur D donc mesurable et comme

$$|g(x, y)| \leq e^{-x}, \quad \forall (x, y) \in D,$$

avec $e^{-x} \in L^1(D)$ alors on déduit que $g \in L^1(D)$. En vertu du théorème de Fubini

$$K = \int_0^1 \left(\int_0^{+\infty} g(x, y) dx \right) dy = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^1 g(x, y) dy \right) dx.$$

Le calcul de la première intégrale donne

$$\begin{aligned} K &= \int_0^1 \left(\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin(xy) dx \right) dy = \int_0^1 \left(\int_0^{+\infty} \operatorname{Im} e^{-x(1-iy)} dx \right) dy \\ &= \int_0^1 \operatorname{Im} \left(-\frac{e^{-x(1-iy)}}{1-iy} \Big|_0^{+\infty} \right) dy = \int_0^1 \operatorname{Im} \left(\frac{1}{1-iy} \right) dy \\ &= \int_0^1 \frac{y}{1+y^2} dy = \frac{1}{2} \ln(1+y^2) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2, \end{aligned}$$

et celui de la seconde

$$\begin{aligned} K &= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^1 e^{-x} \sin(xy) dy \right) dx = - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} \cos(xy) \Big|_0^1 dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{x} e^{-x} dx. \end{aligned}$$

On conclut donc que

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{x} e^{-x} dx = \frac{1}{2} \ln 2.$$

Solution 1.7. 1) $I = \iint_D f(x, y) dx dy$ où $f(x, y) = \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)}$.

La fonction f est mesurable et positive sur D donc d'après le théorème de Fubini-Tonelli

$$I = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} f(x, y) dx \right) dy = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} f(x, y) dy \right) dx.$$

En calculant la première intégrale avec le changement de variable $t = x\sqrt{y}$ pour y fixé dans $]0, +\infty[$, on obtient

$$I = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1+y} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{y}(1+t^2)} \right) dy = \frac{\pi}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{y}(1+y)} dy.$$

Le changement de variable $t = \sqrt{y}$ dans cette dernière intégrale donne alors

$$I = \pi \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi^2}{2}.$$

Calculons maintenant la deuxième intégrale. Comme

$$f(x, y) = \frac{1}{1-x^2} \left(\frac{1}{1+y} - \frac{x^2}{1+x^2y} \right), \quad p.p. (x, y) \in \Omega,$$

alors

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1-x^2} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1+y} - \frac{x^2}{1+x^2y} \right) dy \right) dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1-x^2} \ln \frac{1+y}{1+x^2y} \Big|_0^\infty dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1-x^2} \ln \frac{1}{x^2} dx = -2 \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1-x^2} dx. \end{aligned}$$

On conclut que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2 - 1} dx = \frac{\pi^2}{4}.$$

2) Soit $J = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-x} dx$. Comme $\frac{\sin x}{x} = \int_0^1 \cos(xy) dy$, on écrit

$$J = \int_0^\infty \left(\int_0^1 \cos(xy) dy \right) e^{-x} dx.$$

Soit $g(x, y) = e^{-x} \cos(xy)$, $(x, y) \in \Omega$ où $\Omega =]0, +\infty[\times]0, 1[$. La fonction g est mesurable sur D et comme

$$\iint_D |g(x, y)| dx dy \leq \iint_D e^{-x} dx dy = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1,$$

alors $g \in L^1(D)$. Par conséquent, en vertu du théorème de Fubini

$$J = \int_0^1 \left(\int_0^{+\infty} g(x, y) dx \right) dy.$$

En intégrant (par exemple en écrivant $\cos(xy) = \operatorname{Re} e^{ixy}$), on trouve $\int_0^{+\infty} g(x, y) dx = \frac{1}{1+y^2}$, ce qui donne

$$J = \int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Solution 1.8. La fonction $(x, y) \in D_t \mapsto \sin x e^{-xy}$ est continue donc mesurable et on a pour tout $x \in]0, t[$

$$\int_0^{+\infty} e^{-xy} dy = -\frac{1}{x} e^{-xy} \Big|_0^\infty = \frac{1}{x} < \infty,$$

et

$$\int_0^t |\sin x| \left(\int_0^{+\infty} e^{-xy} dy \right) dx = \int_0^t \frac{|\sin x|}{x} dx < \infty,$$

car la fonction $x \mapsto \frac{|\sin x|}{x}$ (prolongée par 1 en 0) est continue sur $[0, t]$, de sorte que $\sin x e^{-xy} \in L^1(D_t)$, d'après le théorème de Tonelli donc $I(t)$ est bien définie sur $]0, +\infty[$. On peut maintenant appliquer le théorème de Fubini et écrire

$$\begin{aligned} I(t) &= \int_0^\infty \left(\int_0^t \sin x e^{-xy} dx \right) dy = \int_0^\infty \frac{-1}{1+y^2} (\cos x + y \sin x) e^{-xy} \Big|_0^t dy \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{1+y^2} \left(1 - (\cos t + y \sin t) e^{-ty} \right) dy \\ &= \frac{\pi}{2} - \int_0^\infty \frac{1}{1+y^2} (\cos t + y \sin t) e^{-ty} dy, \end{aligned}$$

et aussi

$$I(t) = \int_0^t \sin x \left(\int_0^{+\infty} e^{-xy} dy \right) dx = \int_0^t \frac{\sin x}{x} dx.$$

On voit alors que $J = \lim_{t \rightarrow +\infty} I(t)$. Posons

$$f_t(y) = \frac{1}{1+y^2} (\cos t + y \sin t) e^{-ty}, \quad y, t \in]0, +\infty[.$$

On a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f_t(y) = 0, \quad \forall y \in]0, +\infty[.$$

et

$$|f_t(y)| \leq \frac{(1+y)e^{-y}}{1+y^2} \leq \frac{1}{1+y^2}, \quad \forall y \in]0, +\infty[, \quad \forall t \geq 1.$$

Comme $\frac{1}{1+y^2} \in L^1(]0, +\infty[)$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue et déduire que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^\infty \frac{1}{1+y^2} (\cos t + y \sin t) e^{-ty} dy = 0.$$

On conclut donc que

$$J = \frac{\pi}{2}.$$

Solution 1.9. 1) $f(0) = 0$ et pour $x \in \mathbb{R}^*$, la fonction $u \mapsto \frac{\text{Arctg}(ux)}{u(1+u^2)}$ peut être prolongée par continuité sur $[0, +\infty[$ et comme pour $u > 1$

$$\left| \frac{\text{Arctg}(ux)}{u(1+u^2)} \right| \leq \frac{\pi}{2} \frac{1}{1+u^2} \in L^1(]1, +\infty[),$$

donc f est bien définie sur $\mathbb{R}$ (et de plus elle est impaire).

Etudions sa continuité sur $\mathbb{R}$: Pour tout $u > 0$, la fonction

$$g_u : x \mapsto \frac{\text{Arctg}(ux)}{u(1+u^2)}$$

est continue sur $\mathbb{R}$, et en utilisant l'inégalité $|\text{Arctg } y| \leq |y|$, $y \in \mathbb{R}$, on voit que

$$|g_u(x)| \leq \frac{|x|}{1+u^2}, \quad u \in]0, +\infty[, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Soit $a > 0$, l'inégalité précédente entraîne que pour $u \in]0, +\infty[$ et $x \in]-a, a[$

$$|g_u(x)| \leq \frac{a}{1+u^2} \in L^1(]0, +\infty[),$$

donc f est continue sur $] -a, a[$, d'après le théorème de Lebesgue des intégrales dépendant d'un paramètre. Comme $a > 0$ est quelconque, on conclut que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Etudions maintenant la dérivabilité de f : Notons que pour $u > 0$, g_u est continûment dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$g'_u(x) = \frac{1}{(1+u^2x^2)(1+u^2)},$$

avec

$$|g'_u(x)| = g'_u(x) \leq \frac{1}{1+u^2} \in L^1([0, +\infty[),$$

donc d'après le théorème de Lebesgue des intégrales dépendant d'un paramètre, on conclut que f est continûment dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = \int_0^\infty g'_x(u) du = \int_0^\infty \frac{1}{(1+u^2x^2)(1+u^2)} du.$$

Nous allons calculer cette dernière intégrale. Pour $x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$, on a

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{1}{(1+u^2x^2)(1+u^2)} du &= \frac{1}{1-x^2} \int_0^\infty \left(\frac{1}{1+u^2} - \frac{x^2}{1+u^2x^2} \right) du \\ &= \frac{1}{1-x^2} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}x \right) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{1+x}. \end{aligned}$$

On voit donc que

$$f'(x) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{1+x}, \quad x > 0.$$

Par intégration, étant donné que $f(0) = 0$, on obtient

$$f(x) = \frac{\pi}{2} \operatorname{Log}(1+x), \quad x \geq 0,$$

et puisque f est impaire, on conclut que

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \operatorname{Log}(1+x) & \text{si } x \geq 0 \\ -\frac{\pi}{2} \operatorname{Log}(1-x) & \text{si } x < 0 \end{cases} = \operatorname{sgn}(x) \frac{\pi}{2} \operatorname{Log}(1+|x|).$$

2) On calcule $I = \int_0^\infty \left(\frac{\operatorname{Arctg} t}{t} \right)^2 dt$, par parties en posant $v(t) = \operatorname{Arctg}^2 t$ et $w'(t) = \frac{1}{t^2}$, on obtient

$$I = 2f(1) = \pi \operatorname{Log} 2.$$

Solution 1.10. 1) On écrit $|f|^r = |f|^{\theta r + (1-\theta)r} = g h$ avec $g = |f|^{\theta r}$ et $h = |f|^{(1-\theta)r}$.

▷ Si $q = +\infty$ alors $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p}$ et $p = \theta r$, ce qui entraîne que $g \in L^1(\Omega)$ et comme $h \in L^\infty(\Omega)$ alors $|f|^r \in L^1(\Omega)$, c'est-à-dire $f \in L^r(\Omega)$ et

$$\| |f|^r \|_1 \leq \|g\|_1 \|h\|_\infty.$$

Comme

$$\|g\|_1 = \int_\Omega |f|^{\theta r} dx = \|f\|_p^p \quad \text{et} \quad \|h\|_\infty = \|f\|_\infty^{(1-\theta)r},$$

on obtient

$$\|f\|_r^r \leq \|f\|_p^p \|f\|_\infty^{(1-\theta)r},$$

ou encore

$$\|f\|_r \leq \|f\|_p^\theta \|f\|_\infty^{1-\theta}.$$

▷ Supposons $q < \infty$, alors $g \in L^{p_1}(\Omega)$ et $h \in L^{q_1}(\Omega)$ avec $p_1 = \frac{p}{\theta r}$ et $q_1 = \frac{q}{(1-\theta)r}$. De plus

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} = \frac{\theta r}{p} + \frac{(1-\theta)r}{q} = 1,$$

donc d'après l'inégalité de Hölder $|f|^r \in L^1(\Omega)$ et

$$\| |f|^r \|_1 \leq \|g\|_{p_1} \|h\|_{q_1}.$$

Autrement dit $f \in L^r(\Omega)$ et

$$\|f\|_r^r \leq \|g\|_{p_1} \|h\|_{q_1}.$$

Maintenant

$$\|g\|_{p_1} = \left(\int_{\Omega} (|f|^{\theta r})^{\frac{p}{\theta r}} dx \right)^{\frac{\theta r}{p}} = \|f\|_p^{\theta r},$$

et

$$\|h\|_{q_1} = \left(\int_{\Omega} (|f|^{(1-\theta)r})^{\frac{q}{(1-\theta)r}} dx \right)^{\frac{(1-\theta)r}{q}} = \|f\|_q^{(1-\theta)r},$$

ce qui donne le résultat.

2) La suite (f_n) converge vers f dans l'espace de Banach $L^p(\Omega)$ donc $f \in L^p(\Omega)$ de sorte que $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$. Ainsi d'après la première question, $(f_n)_n \subset L^r(\Omega)$ et $f \in L^r(\Omega)$ donc $(f_n - f)_n \subset L^r(\Omega)$ et on a

$$\|f_n - f\|_r \leq \|f_n - f\|_p^\theta \|f_n - f\|_q^{1-\theta}.$$

Comme $(f_n)_n$ est bornée dans $L^q(\Omega)$ alors il existe un nombre réel $M > 0$ tel que

$$\|f_n - f\|_q \leq \|f_n\|_q + \|f\|_q \leq M, \quad \forall n,$$

de sorte que

$$\|f_n - f\|_r \leq M^{1-\theta} \|f_n - f\|_p^\theta \longrightarrow 0,$$

lorsque $n \rightarrow \infty$ et on conclut que $(f_n)_n$ converge vers f dans $L^r(\Omega)$.

Solution 1.11. Nous rappelons que $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$ et l'intégrale $\int_1^\infty \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Dans cet exercice, nous utiliserons le passage aux coordonnées polaires dans $\mathbb{R}^N$:

$$x = r\omega \quad \text{où } r > 0, \quad \omega \in S^{N-1},$$

S^{N-1} étant la sphère unité de $\mathbb{R}^N$. Nous avons alors $dx = r^{N-1} dr d\omega$ et

$$\int_{|x|<1} \frac{dx}{|x|^\alpha} = \int_{]0,1[\times S^{N-1}} \frac{r^{N-1} dr d\omega}{r^\alpha} = \omega_{N-1} \int_0^1 \frac{dr}{r^{\alpha-N+1}},$$

où ω_{N-1} désigne la mesure de Lebesgue de la surface S^{N-1} . Comme $\int_0^1 \frac{dr}{r^{\alpha-N+1}}$ converge si et seulement si $\alpha < N$, on déduit que $\int_{|x|<1} \frac{dx}{|x|^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < N$.

De la même manière, l'intégrale $\int_{|x|>1} \frac{dx}{|x|^\alpha}$ converge si et seulement si $\int_1^{+\infty} \frac{dr}{r^{\alpha-N+1}}$ converge, c'est-à-dire si et seulement si $\alpha > N$.

Dans tous les cas, l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{dx}{|x|^\alpha} = \int_{|x|\leq 1} \frac{dx}{|x|^\alpha} + \int_{|x|>1} \frac{dx}{|x|^\alpha}$$

est divergente car c'est la somme d'une intégrale convergente et d'une intégrale divergente.

Nous décomposons la dernière intégrale de la manière suivante

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{dx}{(1+|x|)^\alpha} = \int_{|x|\leq 1} \frac{dx}{(1+|x|)^\alpha} + \int_{|x|>1} \frac{dx}{(1+|x|)^\alpha}.$$

Comme la fonction $x \mapsto \frac{1}{(1+|x|)^\alpha}$ est continue sur le compact $\overline{B(0,1)}$, l'intégrale $\int_{|x|\leq 1} \frac{dx}{(1+|x|)^\alpha}$ est convergente pour toutes les valeurs de α . Concernant la deuxième intégrale, notons qu'au voisinage de l'infini,

$$\frac{1}{(1+|x|)^\alpha} \sim \frac{1}{|x|^\alpha},$$

par conséquent l'intégrale $\int_{|x|>1} \frac{dx}{(1+|x|)^\alpha}$ est de même nature que l'intégrale $\int_{|x|>1} \frac{dx}{|x|^\alpha}$. Elle est donc convergente uniquement dans le cas où $\alpha > N$.

Solution 1.12. 1) Si f et g sont de même parité, alors $f * g$ est paire. Par contre si l'une est paire et l'autre impaire, alors $f * g$ est impaire. En effet, si on considère par exemple le cas où f est paire et g est impaire alors pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f * g(-x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(-x-y) dy = - \int_{\mathbb{R}} f(-y)g(x-(-y)) dy.$$

En utilisant le changement de variable $z = -y$, on obtient

$$f * g(-x) = - \int_{\mathbb{R}} f(z)g(x-z) dz = -f * g(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

donc $f * g$ est une fonction impaire.

2) Pour $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(y) = f(a + (y - a)) = f(a - (y - a)) = f(2a - y),$$

et

$$g(a + b + x - y) = g(b - a - x + y),$$

donc pour $x \in \mathbb{R}$, on peut écrire

$$f * g(a + b + x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(a + b + x - y) dy = \int_{\mathbb{R}} f(2a - y)g(b - a - x + y) dy.$$

Le changement de variable $z = 2a - y$ donne alors

$$f * g(a + b + x) = \int_{\mathbb{R}} f(z)g(a + b - x - z) dz = f * g(a + b - x), \quad x \in \mathbb{R},$$

donc $f * g$ est symétrique par rapport à la droite $x = a + b$.

Remarque f symétrique par rapport à la droite $x = a$ signifie que la fonction $F(x) = f(a - x)$ est paire.

3) $\triangleright 1_{[-1,1]} \in L^1(\mathbb{R})$ donc en utilisant l'inégalité de Young, on voit que $1_{[-1,1]} * 1_{[-1,1]}$ est bien définie et appartient à $L^1(\mathbb{R})$. De plus, $1_{[-1,1]}$ est une fonction paire donc la convolution $1_{[-1,1]} * 1_{[-1,1]}$ aussi. Calculons-la pour $x \geq 0$:

$$1_{[-1,1]} * 1_{[-1,1]}(x) = \int_{\mathbb{R}} 1_{[-1,1]}(y)1_{[-1,1]}(x - y) dy = \text{mes}(I_x),$$

où

$$I_x = \{y \in [-1, 1]; -1 \leq x - y \leq 1\} = [-1, 1] \cap [x - 1, x + 1].$$

Notons que $I_x = \emptyset$ si $x > 2$ et $I_x = [x - 1, 1]$ si $x \in [0, 2]$, d'où

$$1_{[-1,1]} * 1_{[-1,1]}(x) = 0 \quad \text{si } x > 2 \quad \text{et} \quad 1_{[-1,1]} * 1_{[-1,1]}(x) = 2 - x \quad \text{si } x \in [0, 2].$$

Par conséquent

$$1_{[-1,1]} * 1_{[-1,1]} = (2 - |x|) 1_{[-2,2]}.$$

$\triangleright$ Comme ci-dessus, la convolution $1_{[0,1]} * 1_{[0,1]}$ est bien définie. On vérifie facilement que la fonction $1_{[0,1]}$ est symétrique par rapport à la droite $x = \frac{1}{2}$ donc la convolution $1_{[0,1]} * 1_{[0,1]}$ est symétrique par rapport à la droite $x = 1$. En utilisant la remarque précédente, on va calculer

$$F(x) = 1_{[0,1]} * 1_{[0,1]}(1 - x), \quad x \geq 0.$$

Soit $x \geq 0$

$$F(x) = \int_0^1 1_{[0,1]}(1-x-y) dy = \text{mes}(J_x)$$

où

$$J_x = \{y \in [0, 1]; 0 \leq 1-x-y \leq 1\} = [0, 1] \cap [-x, 1-x].$$

On voit que $J_x = \emptyset$ si $x > 1$ et $J_x = [0, 1-x]$ si $x \in [0, 1]$, d'où

$$F(x) = 0 \quad \text{si } x > 1 \quad \text{et} \quad F(x) = 1-x \quad \text{si } x \in [0, 1].$$

Par conséquent

$$F(x) = (1 - |x|) 1_{[-1,1]},$$

d'où on déduit

$$1_{[0,1]} * 1_{[0,1]}(x) = F(1-x) = (1 - |1-x|) 1_{[0,2]},$$

puisque $1_{[-1,1]}(1-x) = 1_{[0,2]}(x)$.

Solution 1.13. Pour $a, b > 0$, $f_a, f_b \in L^1(\mathbb{R})$ donc $f_a * f_b$ est bien définie dans $L^1(\mathbb{R})$. De plus comme f_a est continue sur $\mathbb{R}$, il en est de même pour la convolution et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f_a * f_b(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ay^2-b(x-y)^2} dy.$$

On écrit

$$e^{-ay^2-b(x-y)^2} = e^{-bx^2-(a+b)y^2+2bxy} = e^{-\frac{ab}{a+b}x^2} e^{-(a+b)\left(y-\frac{bx}{a+b}\right)^2},$$

et on pose pour x fixé, le changement de variable $t = \sqrt{a+b}(y - \frac{bx}{a+b})$. On a donc

$$f_a * f_b(x) = \frac{e^{-\frac{ab}{a+b}x^2}}{\sqrt{a+b}} \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{a+b}} e^{-\frac{ab}{a+b}x^2},$$

car $\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$.

Solution 1.14. On vérifie que $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ ce qui entraîne l'existence de la convolution $f * g$ (et de plus $f * g \in L^1(\mathbb{R})$). En effet

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1,$$

donc $f \in L^1(\mathbb{R})$. En remarquant que $g(x) = f(-x)$, on déduit que $g \in L^1(\mathbb{R})$. Calculons maintenant $f * g$. Soit $x \in \mathbb{R}$

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y) dy = \int_0^{+\infty} e^{-y}e^{x-y}H(y-x) dy = e^x \int_0^{+\infty} e^{-2y}H(y-x) dy.$$

▷ Si $x < 0$, alors

$$f * g(x) = e^x \int_0^{+\infty} e^{-2y} dy = \frac{1}{2} e^x.$$

▷ Si $x \geq 0$, alors

$$f * g(x) = e^x \int_x^{+\infty} e^{-2y} dy = \frac{1}{2} e^{-x}.$$

Par conséquent

$$f * g(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Solution 1.15. On note A^c le complémentaire dans Ω d'un ensemble $A \subset \Omega$ et $\omega_f = (\text{Supp } f)^c$ l'ouvert d'annulation de la fonction f , c'est-à-dire le plus grand ouvert dans Ω sur lequel la fonction f est nulle presque partout.

1) $f = 0$ p.p. sur ω_f et $g = 0$ p.p. sur ω_g , ce qui entraîne que

$$fg = 0 \text{ p.p. sur } \omega_f \cup \omega_g.$$

Ainsi l'ouvert $\omega_f \cup \omega_g \subset \omega_{fg}$, c'est-à-dire

$$\text{Supp}(fg) \subset (\omega_f \cup \omega_g)^c = \text{Supp } f \cap \text{Supp } g.$$

2) $f + g = 0$ p.p. sur $\omega_f \cap \omega_g$, donc l'ouvert $\omega_f \cap \omega_g \subset \omega_{f+g}$. Par conséquent

$$\text{Supp}(f + g) \subset (\omega_f \cap \omega_g)^c = \text{Supp } f \cup \text{Supp } g.$$

Solution 1.16. Pour $A, B \subset \mathbb{R}^N$, $x \in \mathbb{R}^N$ on note $A \pm B = \{a \pm b, a \in A, b \in B\}$ et $x - A = \{x\} - A$. Nous utilisons également les notations de l'exercice 1.15.

1) Montrons que $\text{Supp}(f * g) \subset \overline{\text{Supp } f + \text{Supp } g}$ ou de manière équivalente $\overset{\circ}{A} \subset \omega_{f * g}$ où $A = (\text{Supp } f + \text{Supp } g)^c$ et $\overset{\circ}{A}$ est l'intérieur de A . Pour presque tout $x \in \mathbb{R}^N$

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(y)g(x - y) dy = \int_{\text{Supp } f \cap (x - \text{Supp } g)} f(y)g(x - y) dy.$$

Soit $x \in \overset{\circ}{A}$ alors pour tout $y \in \text{Supp } g$, $x - y \notin \text{Supp } f$ de sorte que $\text{Supp } f \cap (x - \text{Supp } g) = \emptyset$ et donc

$$f * g(x) = 0,$$

ce qui signifie que

$$\overset{\circ}{A} \subset \omega_{f * g}.$$

2) Nous allons montrer le résultat général suivant. Soient A et B deux parties d'un espace vectoriel normé.

i) Si A est fermé et B est compact alors $A + B$ est fermé,

ii) Si A et B sont compacts alors $A + B$ est compact.

i) Soit $(x_n)_n$ une suite de $A + B$ qui converge vers x , montrons que $x \in A + B$.

Soit $(a_n)_n \subset A$ et $(b_n)_n \subset B$ telles que pour tout n , $x_n = a_n + b_n$. Comme B est compact, alors on peut extraire de $(b_n)_n$ une sous-suite $(b_{\varphi(n)})_n$ qui converge vers $b \in B$. Ainsi

$$a_{\varphi(n)} = -x_{\varphi(n)} + b_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a = -x + b,$$

et $a \in A$ car A est fermé. Par conséquent $x = a + b \in A + B$ et donc $A + B$ est fermé.

ii) Clairement si A et B sont compacts alors $A + B$ est borné et comme d'après la première question, $A + B$ est fermé alors il est compact.

Remarque : Si A et B sont fermés, $A + B$ n'est pas nécessairement fermé, comme on le voit à travers les contre-exemples suivants.

▷ Dans $\mathbb{R}^2$ muni de la topologie usuelle, les ensembles

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0, xy = 1\}, \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0, xy = -1\},$$

sont fermés et pourtant $A + B =]0, +\infty[\times \mathbb{R}$ n'est pas fermé.

▷ Dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$ et $\pi\mathbb{Z}$ sont fermés et $\mathbb{Z} + \pi\mathbb{Z}$ n'est pas fermé. En effet $\overline{\mathbb{Z} + \pi\mathbb{Z}} = \mathbb{R}$.¹

Solution 1.17. 1) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^*$ et

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0),$$

donc f est continue sur $\mathbb{R}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, sa dérivée étant donnée par

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} e^{\frac{-1}{x}} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0$ alors f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$. Ainsi $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R})$ et que $f^{(n)}$ est de la forme

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} P\left(\frac{1}{x}\right) e^{\frac{-1}{x}} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

1. Référence : B. Hauchecorne, *Les contre-exemples en mathématiques, Ellipses 2007*, p. 93.

où P est une fonction polynomiale. Supposons cette propriété vraie à l'ordre $n \geq 1$, alors $f^{(n)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, de dérivée

$$f^{(n+1)}(x) = \begin{cases} Q\left(\frac{1}{x}\right) e^{\frac{-1}{x}} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

où Q est une fonction polynomiale donnée par $Q(x) = x^2(-P'(x) + P(x))$. De plus comme $\lim_{x \rightarrow 0} f^{(n+1)}(x) = 0$ alors on conclut que la propriété ci-dessus est vraie à l'ordre $(n+1)$ et donc $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

Clairement le plus grand ouvert sur lequel f est nulle est $] -\infty, 0[$, d'où

$$\text{Supp } f = \mathbb{R} \setminus] -\infty, 0[= [0, +\infty[.$$

La fonction g s'exprime à l'aide de la fonction f comme étant $g(x) = f(1 - x^2)$. Par conséquent $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $x \in \text{Supp } g$ si et seulement si $1 - x^2 \in \text{Supp } f$, c'est-à-dire

$$\text{Supp } g = [-1, 1].$$

Par conséquent $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

2) La fonction $\varphi(x) = f(1 - |x|^2)$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}^N$ et $\text{Supp } \varphi = \overline{B}(0, 1)$ donc $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. De même pour $x_0 \in \mathbb{R}^N$ et $r > 0$ fixés, la fonction $\psi(x) = f(r^2 - |x - x_0|^2)$ est dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ et $\text{Supp } \psi = \overline{B}(x_0, r)$.

Solution 1.18. 1) Soit $f \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R})$, une intégration par parties donne

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) e^{inx} dx = -\frac{1}{in} \int_{\mathbb{R}} f'(x) e^{inx} dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

d'où

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{inx} dx \right| \leq \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}} |f'(x) e^{inx}| dx = \frac{1}{n} \|f'\|_1,$$

ce qui implique que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{inx} dx = 0.$$

2) Maintenant considérons le cas où $f \in L^1(\mathbb{R})$ et soit $\varepsilon > 0$. Sachant que $\mathcal{C}_c^1(\mathbb{R})$ est dense dans $L^1(\mathbb{R})$, il existe $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R})$ telle que

$$\|f - \varphi\|_1 < \frac{\varepsilon}{2}.$$

On écrit alors

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{inx} dx \right| &\leq \left| \int_{\mathbb{R}} (f - \varphi)(x) e^{inx} dx \right| + \left| \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{inx} dx \right| \\ &\leq \|f - \varphi\|_1 + \left| \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{inx} dx \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \left| \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{inx} dx \right|. \end{aligned}$$

D'après la première étape, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{inx} dx = 0$ donc

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{inx} dx \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

pour n assez grand, de sorte que pour n assez grand, nous avons

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{inx} dx \right| < \varepsilon.$$

Solution 1.19. 1) Soit $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$, alors f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ donc

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|f - f(\cdot + h)\|_{\infty} = 0.$$

Soit $a > 0$ tel que $\text{Supp } f \subset [-a, a]$, comme $\text{Supp } f(\cdot + h) \subset [-a - h, a - h] \subset [-a - 1, a + 1]$ pour $|h| < 1$, on peut écrire pour $1 \leq p < \infty$

$$\|f - f(\cdot + h)\|_p^p = \int_{-(a+1)}^{(a+1)} |f(x) - f(x + h)|^p dx \leq 2(a + 1) \|f - f(\cdot + h)\|_{\infty}^p.$$

Par conséquent $\lim_{h \rightarrow 0} \|f - f(\cdot + h)\|_p^p = 0$, donc

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|f - f(\cdot + h)\|_p = 0.$$

2) Soit maintenant $f \in L^p(\mathbb{R})$ avec $1 \leq p < \infty$ et soit $\varepsilon > 0$, sachant que $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$, il existe $\varphi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ telle que

$$\|f - \varphi\|_p < \frac{\varepsilon}{3}.$$

On écrit alors pour tout h

$$\|f - f(\cdot + h)\|_p \leq \|f - \varphi\|_p + \|\varphi - \varphi(\cdot + h)\|_p + \|\varphi(\cdot + h) - f(\cdot + h)\|_p.$$

Comme la mesure de Lebesgue est invariante par translation alors

$$\|\varphi(\cdot + h) - f(\cdot + h)\|_p = \|\varphi - f\|_p < \frac{\varepsilon}{3},$$

et en utilisant la première étape, on voit que pour $|h|$ petit

$$\|\varphi - \varphi(\cdot + h)\|_p < \frac{\varepsilon}{3},$$

donc pour $|h|$ petit

$$\|f - f(\cdot + h)\|_p < \varepsilon.$$

3) Le résultat est faux dans $L^\infty(\mathbb{R})$. Pour s'en persuader, considérer $f = H = 1_{]0, +\infty[}$, on a alors pour tout $h \in \mathbb{R}^*$,

$$\|f - f(\cdot + h)\|_\infty = 1.$$

CHAPITRE

2

LES DISTRIBUTIONS

Espace $\mathcal{D}$, premières propriétés des distributions, convergence, dérivation, recherche de primitives, le problème de division par une fonction.

2.1 Rappel de cours

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$.

2.1.1 Les fonctions test

Définition 2.1 (de $\mathcal{D}(\Omega)$). $\mathcal{D}(\Omega)$ est l'espace des fonctions $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) indéfiniment différentiables sur Ω , à supports compacts, c'est-à-dire

$$\mathcal{D}(\Omega) = \mathcal{C}_c^\infty(\Omega) = \mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap \mathcal{C}_c(\Omega).$$

*Les éléments de $\mathcal{D}(\Omega)$ sont appelés des **fonctions test**.*

Notation : Soit K un compact de Ω , on pose $\mathcal{D}_K(\Omega) = \{\varphi \in \mathcal{D}(\Omega); \text{Supp } f \subset K\}$.

Définition 2.2 (Fonction plateau subordonnée à un compact). Soit K un compact de Ω , une fonction plateau subordonnée à K est une fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que $0 \leq \varphi \leq 1$ sur Ω et $\varphi = 1$ sur un voisinage de K .

Définition 2.3 (Convergence dans $\mathcal{C}_c(\Omega)$). Soit $(\varphi_n)_n$ une suite de $\mathcal{C}_c(\Omega)$. On dit que $(\varphi_n)_n$ converge vers une fonction φ dans $\mathcal{C}_c(\Omega)$ si les deux conditions suivantes sont satisfaites

- i) Il existe un compact K de Ω ; $\text{Supp } \varphi_n \subset K, \forall n$,
- ii) $(\varphi_n)_n$ converge vers φ uniformément sur Ω .

Nous ne définissons pas la topologie de $\mathcal{C}_c(\Omega)$. Pour les besoins de ce cours, nous nous limitons à la définition de la convergence des suites des ses éléments. De même, nous définissons ci-dessous la convergence des suites dans $\mathcal{D}(\Omega)$.

Définition 2.4 (Convergence dans $\mathcal{D}(\Omega)$). Soit $(\varphi_n)_n$ une suite de $\mathcal{D}(\Omega)$. On dit que $(\varphi_n)_n$ converge vers une fonction φ dans $\mathcal{D}(\Omega)$ si les deux conditions suivantes sont satisfaites

- i) Il existe un compact K de Ω ; $\text{Supp } \varphi_n \subset K, \forall n$,
- ii) Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^N$, $(\partial^\alpha \varphi_n)_n$ converge vers $\partial^\alpha \varphi$ uniformément sur Ω .

En particulier la convergence de $(\varphi_n)_n$ vers φ dans $\mathcal{D}(\Omega)$ entraîne la convergence de $(\partial^\alpha \varphi_n)_n$ vers $\partial^\alpha \varphi$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$. Bien sûr, la convergence dans $\mathcal{D}(\Omega)$ implique la convergence dans $\mathcal{C}_c(\Omega)$. De plus, $\mathcal{D}(\Omega) \subset \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, cette inclusion étant topologique et dense, de même que $\mathcal{D}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$, pour tout $p \in [1, \infty[$ mais $\mathcal{D}(\Omega)$ n'est pas dense dans $L^\infty(\Omega)$.

2.1.2 Les distributions

• Définitions et caractérisation

Définition 2.5 (Mesure de Radon). On appelle mesure de Radon sur Ω , toute forme $\mu : \mathcal{C}_c(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) linéaire et continue au sens suivant : pour toute suite $(\varphi_n)_n$ convergeant vers φ dans $\mathcal{C}_c(\Omega)$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\varphi_n) = \mu(\varphi).$$

L'ensemble $\mathcal{M}(\Omega)$ des mesures de Radon sur Ω est donc le dual de $\mathcal{C}_c(\Omega)$.

Une mesure de Radon sur Ω est une forme linéaire μ sur $\mathcal{C}_c(\Omega)$ qui est caractérisée par la propriété suivante : Pour tout compact K de Ω , il existe une constante $C_K > 0$ telle que

$$|\mu(\varphi)| \leq C_K \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c(\Omega); \text{ Supp } \varphi \subset K.$$

Définition 2.6 (Distribution). Une distribution sur Ω est une forme $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) linéaire et continue au sens suivant : pour toute suite $(\varphi_n)_n$ convergeant vers φ dans $\mathcal{D}(\Omega)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} T(\varphi_n) = T(\varphi)$.

L'ensemble des distributions sur Ω est donc le dual de $\mathcal{D}(\Omega)$, il est noté $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Une distribution sur Ω est une forme linéaire T sur $\mathcal{D}(\Omega)$ caractérisée par la propriété suivante : Pour tout compact K de Ω , il existe une constante $C_K > 0$ et un entier $m_K \in \mathbb{N}$ tels que

$$|T(\varphi)| \leq C_K \sum_{|\alpha| \leq m_K} \|\partial^\alpha \varphi\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega).$$

Dans le cas où l'entier $m_K = m$ est indépendant du compact K , on dit que la distribution est d'ordre fini (inférieur ou égal à m), l'ordre étant le plus petit entier vérifiant cette propriété.

Notation : Si $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on écrira $\langle T, \varphi \rangle$ au lieu de $T(\varphi)$.

• Quelques exemples fondamentaux

Toute mesure de Radon μ sur Ω peut-être considérée comme une distribution sur Ω , d'ordre 0. On pose

$$T_\mu : \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \mapsto \mu(\varphi),$$

et l'application $\mu \in \mathcal{M}(\Omega) \mapsto T_\mu \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est injective : on identifie alors $\mathcal{M}(\Omega)$ à un sous-espace de $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Ainsi si $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, on lui associe une mesure de Radon et donc une distribution sur Ω notée T_f (ou simplement f) définie par

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c(\Omega).$$

Une telle distribution est dite **régulière**. C'est le cas de la fonction de **Heaviside** $H = 1_{[0, +\infty[}$ et des fonctions $\log|x|$, $\frac{1}{\sqrt{|x|}}$ qui définissent des distributions régulières sur $\mathbb{R}$.

Une distribution qui n'est pas associée à une fonction localement intégrable est dite **singulière**, c'est le cas des **distributions de Dirac** δ_a , $a \in \Omega$, définies par

$$\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a), \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c(\Omega).$$

Noter que la fonction $\frac{1}{x}$ n'est pas localement intégrable sur $\mathbb{R}$ et ne définit donc pas une distribution sur $\mathbb{R}$. On définit la distribution **valeur principale de $\frac{1}{x}$** sur $\mathbb{R}$ notée $Vp \frac{1}{x}$ par

$$\langle Vp \frac{1}{x}, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

C'est une distribution (singulière) d'ordre 1.

• Convergence dans $\mathcal{D}'(\Omega)$

Définition 2.7. Soit $(T_n)_n \subset \mathcal{D}'(\Omega)$, $(T_n)_n$ converge vers T dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle T_n, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Exemple : Dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ puisque pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\varphi(n) = 0$ pour n assez grand.

Propriétés : 1) La convergence dans $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$ implique la convergence dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, de même que la convergence dans $L^p_{loc}(\Omega)$.

2) D'après le théorème de Banach-Steinhaus, si $(T_n)_n \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ est telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle T_n, \varphi \rangle$ existe et est finie pour chaque $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ alors l'application T définie sur $\mathcal{D}(\Omega)$ par

$$\langle T, \varphi \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle T_n, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

est une distribution sur Ω .

Exemple : Soit la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ pour $\varepsilon > 0$ par

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{x} \text{ si } |x| \geq \varepsilon \text{ et } f_\varepsilon(x) = 0 \text{ sinon.}$$

Alors $f_\varepsilon \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et comme pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx$ existe et est finie, on déduit que la forme linéaire

$$T : \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx,$$

définit une distribution sur $\mathbb{R}$. Noter que T n'est autre que la distribution $Vp \frac{1}{x}$.

Série de distributions : Une série de distributions $\sum_{n \in \mathbb{N}} T_n$ converge dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ si la suite des ses sommes partielles $S_n = T_0 + T_1 + \dots + T_n$ converge dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, ou de manière équivalente si pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}} \langle T_n, \varphi \rangle$ converge.

Exemple : La série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \delta_n$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. En fait pour chaque $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, la somme $\sum_{n \in \mathbb{N}} \varphi(n)$ ne contient qu'un nombre fini de termes non nuls. Plus précisément si $m \in \mathbb{N}^*$ est tel que $\text{Supp } \varphi \subset [-m, m]$, alors $\sum_{n \in \mathbb{N}} \varphi(n) = \sum_{k=0}^m \varphi(k)$.

2.1.3 Opérations sur les distributions

• Restriction à un ouvert

Définition 2.8. Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\omega \subset \Omega$ un ouvert. On pose

$$\langle T|_\omega, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\omega).$$

Cette définition a un sens car $\mathcal{D}(\omega) \subset \mathcal{D}(\Omega)$, en convenant de prolonger toute fonction φ de $\mathcal{D}(\omega)$ par 0 en dehors de ω (et en gardant la notation φ pour le prolongement). Ainsi si $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, alors la restriction de la distribution T_f à ω coïncide avec la distribution associée à la restriction de la fonction, c'est-à-dire $(T_f)|_{\omega} = T_{(f|_{\omega})}$.

Exemples : $\delta|_{\omega} = 0$ si l'ouvert ω ne contient pas 0 et $(Vp \frac{1}{x})|_I = \frac{1}{x}$ si I est un intervalle ouvert ne contenant pas 0.

• Translation et dilatation

Ici $\Omega = \mathbb{R}^N$. Soit $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction, on définit sa translation de vecteur $a \in \mathbb{R}^N$ par $\tau_a f(x) = f(x - a)$ et sa dilatation de rapport $\lambda \in \mathbb{R}^*$ par $\Pi_{\lambda} f(x) = f(\frac{x}{\lambda})$.

Définition 2.9. Soit $a \in \mathbb{R}^N$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$, pour $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$, on définit $\tau_a T, \Pi_{\lambda} T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ par

$$\langle \tau_a T, \varphi \rangle = \langle \Pi_{\lambda} T, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),$$

$$\langle \Pi_{\lambda} T, \varphi \rangle = |\lambda|^N \langle T, \Pi_{\frac{1}{\lambda}} \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Exemples : 1) Si $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$, alors

$$\tau_a(T_f) = T_{(\tau_a f)} \quad \text{et} \quad \Pi_{\lambda}(T_f) = T_{(\Pi_{\lambda} f)}.$$

2) $\tau_a \delta = \delta_a$ puisque pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$

$$\langle \tau_a \delta, \varphi \rangle = \langle \delta, \tau_{-a} \varphi \rangle = \tau_{-a} \varphi(0) = \varphi(a).$$

Notation : $\Pi_{-1} T = \overset{\vee}{T}$, appelée symétrique de T par rapport à l'origine.

Définition 2.10 (Parité d'une distribution). Une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ est dite paire (respectivement impaire) si $\overset{\vee}{T} = T$ (respectivement si $\overset{\vee}{T} = -T$).

Exemple : δ est une distribution paire et $Vp \frac{1}{x}$ est une distribution impaire sur $\mathbb{R}$.

• Multiplication par une fonction $\mathcal{C}^{\infty}$

Définition 2.11. Soient $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $f \in \mathcal{C}^{\infty}(\Omega)$, fT (ou Tf) est la distribution sur Ω définie par

$$\langle fT, \varphi \rangle = \langle T, f\varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Exemples : On vérifie facilement que $f\delta_a = f(a)\delta_a$, $\forall a \in \Omega$. En particulier dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $x\delta = 0$. On a également $xVp \frac{1}{x} = 1$.

Notons enfin qu'on ne peut pas définir le produit de deux distributions d'une manière satisfaisante.

Ainsi $(Vp \frac{1}{x} x)\delta = 1 \delta = \delta$ alors que $Vp \frac{1}{x} (x\delta) = Vp \frac{1}{x} 0 = 0$.

Propriété : L'application $T \in \mathcal{D}'(\Omega) \mapsto fT \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est linéaire et continue.

• Dérivation

Définition 2.12. Soient $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^N$, $\partial^\alpha T$ est la distribution sur Ω définie par

$$\langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Exemples : Dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $H' = \delta$, $(\text{Log}|x|)' = Vp \frac{1}{x}$.

Propriétés : La dérivation des distributions généralise celle des fonctions. Ainsi si $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, alors $\partial_i(T_f) = T_{\partial_i f}$ c'est-à-dire que la dérivée $\partial_i f$ de f au sens usuel coïncide avec sa dérivée au sens des distributions.

Formule des sauts en dimension 1 : Soit f une fonction continue sur l'intervalle $I =]a, b[$ sauf au point c qui est un point de discontinuité de première espèce (c'est-à-dire que les limites à droite $f(c+)$ et à gauche $f(c-)$ en ce point existent et sont finies). On note $[f]_c = f(c+) - f(c-)$ le saut de f en ce point. On suppose que f est continûment dérivable sur $]a, c[$ et $]c, b[$ et que les fonctions f et f' définissent des distributions sur I notées respectivement T_f et $T_{f'}$. Nous avons alors la formule des sauts

$$(T_f)' = T_{f'} + [f]_c \delta_c \quad \text{dans } \mathcal{D}'(I).$$

Exemple : $(T_H)' = \delta$ que l'on écrit plus simplement $H' = \delta$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

La formule des sauts se généralise au cas où la fonction présente plusieurs sauts $c_1, c_2, \dots, c_n$ et on obtient

$$(T_f)' = T_{f'} + \sum_{i=1}^n [f]_{c_i} \delta_{c_i} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(I).$$

Ainsi $(1_{[a,b]})' = \delta_a - \delta_b$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $-\infty < a < b < +\infty$.

En fait, si la fonction présente un nombre localement fini de sauts, la formule demeure vraie. Ainsi la dérivée dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de la fonction E (partie entière de x) est donnée par

$$E' = \sum_{n \geq 0} \delta_n.$$

La formule de Leibnitz : Soient $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^N$, on a

$$\partial^\alpha(fT) = \sum_{\beta \leq \alpha} \mathcal{C}_\alpha^\beta \partial^\beta f \partial^{\alpha-\beta} T.$$

• **Distribution de Dirac portée par une hypersurface**

Soit S une hypersurface de $\mathbb{R}^N$ régulière, on note $\nu = \nu(x)$ la normale unitaire en tout point x de S et $dS(x)$ la mesure de Lebesgue sur S .

Distribution simple couche Soit α une fonction localement intégrable sur S . L'application

$$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \mapsto \int_S \alpha(x) \varphi(x) dS(x),$$

est une distribution sur $\mathbb{R}^N$ d'ordre 0, notée $\alpha \delta_S$ et appelée distribution simple couche portée par S , de densité α . Lorsque $\alpha = 1$, on la note simple δ_S .

Distribution double couche Soit α une fonction localement intégrable sur S . L'application

$$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \mapsto - \int_S \alpha(x) \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}(x) dS(x),$$

(où $\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = \nabla \varphi \cdot \nu$ est la dérivée normale de φ) est une distribution sur $\mathbb{R}^N$ d'ordre 1, notée $\frac{\partial}{\partial \nu}(\alpha \delta_S)$ et appelée distribution double couche portée par S , de densité α .

Formule des sauts en dimension supérieure : Soit Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^N$ et $S = \partial\Omega$ son bord. On note $\nu = \nu(x)$ la normale unitaire extérieure à Ω en tout point x de S .

Soit $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^1$ par morceaux, présentant des discontinuités de première espèce à travers S . Pour $x_0 \in S$, on note

$$f(x_0+) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0, \\ x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega}} f(x), \quad f(x_0-) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0, \\ x \in \Omega}} f(x) \quad \text{et} \quad [f]_S(x_0) = f(x_0+) - f(x_0-),$$

la dernière quantité représentant le saut de f à travers S au point x_0 . On a alors pour $i = 1, 2, \dots, N$

$$\partial_{x_i}(T_f) = T_{(\partial_{x_i} f)} + [f]_S \nu_i \delta_S \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N).$$

• Primitives d'une distribution en une dimension

Définition 2.13. Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $S, T \in \mathcal{D}'(I)$. On dit que S est une primitive de T si $S' = T$.

Les primitives de T sont alors de la forme $S + C$ où C est une constante arbitraire. Nous allons décrire la manière de déterminer une primitive S de T . Soit $\varphi_0 \in \mathcal{D}(I)$ telle que $\int_I \varphi_0(x) dx = 1$. On montre que pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(I)$, il existe une unique fonction $\psi \in \mathcal{D}(I)$ telle que $\varphi = \lambda \varphi_0 + \psi'$. Il suffit alors de poser

$$\langle S, \varphi \rangle = -\langle T, \psi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(I).$$

Exemple : Les primitives de $Vp \frac{1}{x}$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ sont $\ln|x| + C$, $C \in \mathbb{R}$.

• Division par une fonction

Soit $f \in C^\infty(\Omega)$ et $S \in \mathcal{D}'(\Omega)$. On considère le problème (dit de division) :

$$\text{Trouver } T \in \mathcal{D}'(\Omega) ; f T = S.$$

Si la fonction f ne s'annule pas sur Ω , alors la fonction $\frac{1}{f} \in C^\infty(\Omega)$ et l'unique solution de l'équation est $T = \frac{1}{f} S$. Dans le cas contraire, le problème est plus compliqué à résoudre. On montre, par exemple que les solutions de $xT = 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ sont données par $T = C\delta$, où C est une constante arbitraire. Consulter à ce sujet l'exercice [2.27](#) ainsi que les exercices [2.28](#) et [2.29](#).

2.2 Énoncé des exercices

Exercice 2.1. Soit la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} \exp\left(\frac{n^2}{x^2 - n^2}\right) & \text{si } |x| < n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Vérifier que $(\varphi_n)_n \subset \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et que $\varphi_n^{(k)} \rightarrow 0$ uniformément sur $\mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}$. La suite $(\varphi_n)_n$ est-elle convergente dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$?

Exercice 2.2. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et soit la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\varphi_n(x) = e^{-n} \varphi(nx).$$

Vérifier que $(\varphi_n)_n \subset \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et montrer que $\varphi_n \rightarrow 0$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Que peut-on dire de la suite $\psi_n(x) = e^{-n} \varphi(n+x)$?

Exercice 2.3. Soit $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, on pose

$$L(\varphi) = f * \varphi, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N).$$

Montrer que L définit une application linéaire et continue de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$.

Exercice 2.4. Soit I un intervalle ouvert.

1. Montrer qu'une fonction $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ est la dérivée d'une fonction de $\mathcal{D}(I)$ si et seulement si elle vérifie la condition $\int_I \varphi(x) dx = 0$.
2. Soit φ_0 une fonction de $\mathcal{D}(I)$ telle que $\int_I \varphi_0(x) dx = 1$. Montrer que toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ se décompose d'une manière unique sous la forme $\varphi = \lambda \varphi_0 + \varphi_1'$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\varphi_1 \in \mathcal{D}(I)$.

Exercice 2.5. Pour $\varphi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$, on pose

$$\langle T, \varphi \rangle = \varphi(0) + \int_0^1 \varphi(x) dx.$$

Montrer que T définit une mesure de Radon sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2.6. Les fonctions suivantes définissent-elles des distributions sur $\mathbb{R}$?

$$|x|, \quad \sqrt{|x|}, \quad \frac{1}{\sqrt{|x|}}, \quad \frac{1}{x}, \quad \sin \frac{1}{x}, \quad \ln |x|.$$

Exercice 2.7. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ une fonction plateau subordonnée au compact $[1, 2]$, on pose $\varphi_n(x) = e^{-n}\varphi(nx)$. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{1}{x^2}} \varphi_n(x) dx = +\infty. \quad (2.1)$$

Que peut-on en déduire ?

Exercice 2.8. Soient $a \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}^*$, les applications suivantes définissent-elles des distributions sur $\mathbb{R}$?

$$\begin{aligned} T_1(\varphi) &= \varphi^2(a), & T_2(\varphi) &= \varphi'(a), & T_3(\varphi) &= \int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)| dx, \\ T_4(\varphi) &= \sum_{n \geq 0} \varphi(n), & T_5(\varphi) &= \varphi^{(k)}(a), & T_6(\varphi) &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(x^2) dx. \end{aligned}$$

Dans l'affirmative, préciser leurs ordres. Pour T_2 , on pourra utiliser la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $\varphi_n(x) = (x - a) \theta(n(x - a))$ où $\theta \in \mathcal{D}(-1, 1]$ est une fonction plateau subordonnée au compact $\{0\}$. Peut-on identifier la distribution T_6 ?

Exercice 2.9. Soit l'application T définie sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ par $\langle T, \varphi \rangle = \sum_{n \geq 0} \varphi^{(n)}(n)$. Montrer que T est une distribution sur $\mathbb{R}$ d'ordre infini. (En supposant qu'elle est d'ordre m , considérer la suite de fonctions $\varphi_n(x) = \frac{(x - m - 1)^{m+1}}{(m + 1)!} \theta(n(x - m - 1))$ où θ est la fonction définie dans l'exercice précédent).

Exercice 2.10. Montrer que la distribution $Vp \frac{1}{x}$ est d'ordre 1. On pourra utiliser pour cela des fonctions plateaux $\varphi_\varepsilon \in \mathcal{D}(]0, 2])$ subordonnées aux compacts $[\varepsilon, 1]$, $0 < \varepsilon < 1$.

Exercice 2.11. 1. La fonction $\frac{H}{x}$ est-elle localement intégrable sur $\mathbb{R}$?

2. Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on pose :

$$\langle Pf \frac{H}{x}, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{x \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \varphi(0) \ln \varepsilon \right).$$

Montrer que $Pf \frac{H}{x}$ définit une distribution sur $\mathbb{R}$ (appelée partie finie de $\frac{H}{x}$).

3. Déterminer la restriction de cette distribution à $] - \infty, 0[$ et à $]0, +\infty[$.

4. Etablir une relation simple entre $Pf \frac{H}{x}$, sa symétrique par rapport à l'origine et $Vp \frac{1}{x}$.

5. Déterminer la distribution $x Pf \frac{H}{x}$.

Exercice 2.12. Soit T une forme définie sur $\mathcal{C}_c(\Omega)$ linéaire et positive, c'est-à-dire

$$\langle T, \varphi \rangle \geq 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c(\Omega), \varphi \geq 0.$$

Montrer que T est une mesure de Radon.

- Exercice 2.13.** 1. Montrer que la convergence faible dans $L^p(\Omega)$ ($1 \leq p < \infty$) implique la convergence dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ puis montrer que la réciproque est fausse, en considérant la suite de fonctions $f_n = \frac{n}{2} 1_{[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]}$.
2. Soit $(f_n)_n$ une suite bornée dans $L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$ qui converge dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ vers T .
- (a) En utilisant un résultat de densité, montrer que $(f_n)_n$ converge faiblement dans $L^p(\Omega)$ vers une fonction f . (Indication : montrer que les intégrales $\int_{\Omega} f_n g \, dx$ forment une suite de Cauchy pour $g \in (L^p(\Omega))'$).
- (b) En déduire que $T = T_f$.
3. En déduire que dans $L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, une suite converge faiblement si et seulement si elle est bornée et converge dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ puis vérifier que ce résultat est faux dans L^1 .

Exercice 2.14. Etudier dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, la convergence des suites de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \frac{n}{2} 1_{[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]}, & g_n(x) &= -n 1_{[-\frac{1}{n}, 0]} + n 1_{[0, \frac{1}{n}]}, & h_n(x) &= \sin(nx), \\ k_n(x) &= \frac{\sin(nx)}{x}, & l_n(x) &= \sin^2(nx), & m_n(x) &= a_n 1_{[n, \infty[}, \quad (a_n)_n \subset \mathbb{R}, \\ r_n(x) &= \sqrt{n} e^{-nx^2}, & s_n(x) &= n \sin(nx) H(x), & t_n(x) &= \exp(inx), \quad i^2 = -1, \\ u_n(x) &= \left(\cos \frac{x}{\sqrt{n}} \right)^n. \end{aligned}$$

On rappelle que $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x}{x} \, dx = \pi$ et $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \, dx = \sqrt{\pi}$.

Exercice 2.15. Soit la suite de formes $(T_n)_n$ définies sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ par

$$\langle T_n, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\cos(nx)}{x} \varphi(x) \, dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Vérifier que $(T_n)_n \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et calculer sa limite.

Exercice 2.16. Déterminer dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ les limites suivantes :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{x + i\varepsilon}, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{x - i\varepsilon}, \quad (i^2 = -1), \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\varepsilon}{|x|^{1-\varepsilon}}.$$

Exercice 2.17. 1. Etudier la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} S_n$ où

$$\langle S_n, \varphi \rangle = \varphi^{(n)}(0), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Considérer $\varphi = e^x \theta$ où θ est une fonction plateau égale à 1 au voisinage de 0.

2. Soit la suite de distributions $(T_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ définie sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ par $T_n = c_n \exp(inx)$ où la suite $(c_n)_n \subset \mathbb{C}$ possède la propriété suivante : il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $|c_n| \leq |n|^k$ pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$.

Montrer que la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} T_n$ est convergente dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Exercice 2.18. 1. Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on pose

$$\begin{aligned} \langle Pf \frac{1}{x^2}, \varphi \rangle &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx - 2 \frac{\varphi(0)}{\varepsilon} \right), \\ \langle Pf \frac{H}{x^2}, \varphi \rangle &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{x \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx - \frac{\varphi(0)}{\varepsilon} + \varphi'(0) \ln \varepsilon \right). \end{aligned}$$

Montrer que ces applications définissent des distributions sur $\mathbb{R}$ (appelées "partie finie" de $\frac{1}{x^2}$ et $\frac{H}{x^2}$ respectivement).

2. Définir de même les distributions $Pf \frac{1}{x^n}$ et $Pf \frac{H}{x^n}$ pour $n \geq 3$.

Exercice 2.19. 1. Les fonctions $\frac{1}{|x|^N}$ et $\frac{1}{|x|^{N+1}}$ sont-elles localement intégrables sur $\mathbb{R}^N$?

2. Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, on pose

$$\begin{aligned} \langle Pf \frac{1}{|x|^N}, \varphi \rangle &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{|x|^N} dx + \omega_N \varphi(0) \ln \varepsilon \right), \\ \langle Pf \frac{1}{|x|^{N+1}}, \varphi \rangle &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{|x|^{N+1}} dx - \omega_N \frac{\varphi(0)}{\varepsilon} \right), \end{aligned}$$

où ω_N désigne la mesure (superficielle) de la sphère unité de $\mathbb{R}^N$.

(a) Montrer que ces applications définissent des distributions sur $\mathbb{R}^N$.

(b) Pour $N = 1$, établir une relation simple entre $Pf \frac{H}{x}$ et $Pf \frac{1}{|x|}$ puis entre $Pf \frac{H}{x^2}$ et $Pf \frac{1}{|x|^2}$.

Exercice 2.20. Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et soit ω un ouvert borné de Ω tel que $\bar{\omega} \subset \Omega$. Montrer que la distribution $T|_{\omega}$ est d'ordre fini.

Exercice 2.21. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, déterminer $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{T(x+h) - T(x)}{h}$.

Exercice 2.22. Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

- Montrer que $f\delta' = C_0\delta + C_1\delta'$ où C_0 et C_1 sont deux constantes à déterminer.
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que $f\delta^{(k)} = \sum_{i=0}^k C_{k_i} \delta^{(i)}$ où C_{k_i} sont des constantes à déterminer.

Exercice 2.23. 1. Calculer les dérivées des distributions suivantes sur $\mathbb{R}$

$$(\sin x)1_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}, \quad \text{sgn}(x), \quad |x|, \quad \text{sgn}(x) e^{-|x|}, \quad \ln|x|, \quad H \ln|x|, \quad Vp \frac{1}{x}, \quad Pf \frac{1}{x^2}, \quad Pf \frac{H}{x^2},$$

$E(x)$ (partie entière de x), $f(x) = x$, $-\pi < x < \pi$, f 2π -périodique.

2. Déterminer les dérivées successives de la distribution $\frac{x^n}{n!} H(x)$, $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2.24. 1. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = H(x)$.

Calculer au sens des distributions, les dérivées partielles d'ordre inférieur ou égal à 2 de f .

2. Soit T la forme définie sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ par $\langle T, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, x) dx$.

Montrer que $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ et calculer $\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y}$.

Exercice 2.25. Etudier dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, la convergence des suites de distributions sur $\mathbb{R}$

$$n(\delta_{\frac{1}{n}} - \delta_{-\frac{1}{n}}), \quad n(\delta - \delta_{\frac{1}{n}})'', \quad n^2(\delta_{\frac{1}{n}} + \delta_{-\frac{1}{n}} - 2\delta), \quad n^3(\delta_{\frac{1}{n}} - \delta_{-\frac{1}{n}} + \frac{2}{n} \delta').$$

Exercice 2.26. Déterminer les primitives des distributions δ , H , xH , $Vp\frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2.27. Soit $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, on considère l'équation $xT = S$.

1. Soit $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ une fonction valant 1 au voisinage de 0. Montrer que toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ se décompose d'une manière unique sous la forme

$$\varphi = \varphi(0)\theta + x\psi \quad \text{où } \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

2. Résoudre l'équation $xT = 0$ et en déduire que les solutions de l'équation $xT = S$ sont de la forme $T = T_0 + C\delta$ où $C \in \mathbb{R}$ et $T_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est une solution particulière.
3. Montrer qu'une solution particulière de l'équation $xT = S$ est obtenue en posant $\langle T_0, \varphi \rangle = \langle S, \psi \rangle$.
4. Résoudre l'équation $xT = S$ dans les cas suivants :

$$S = 1, \quad S = \delta, \quad S = \delta', \quad S = Vp\frac{1}{x}, \quad S = Pf\frac{1}{x^2}.$$

Exercice 2.28. Soit $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'équation $x^n T = S$.

1. Soit $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ une fonction valant 1 au voisinage de 0. Montrer que toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ se décompose d'une manière unique sous la forme

$$\varphi = \theta \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} \varphi^{(k)}(0) + x^n \psi \quad \text{où } \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

2. Résoudre l'équation $x^n T = 0$ et en déduire que les solutions de l'équation $x^n T = S$ sont de la forme $T = T_0 + \sum_{k=0}^{n-1} C_k \delta^{(k)}$ où $C_k \in \mathbb{R}$ et $T_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est une solution particulière.

3. En déduire qu'une solution particulière de l'équation $x^n T = S$ est obtenue en posant : $\langle T_0, \varphi \rangle = \langle S, \psi \rangle$.

4. Résoudre l'équation $x^n T = S$ dans les cas suivants : $S = 1$, $S = \delta$.

Exercice 2.29. Soit $a, b \in \mathbb{R}$, résoudre les équations suivantes, en s'inspirant des résultats des exercices précédents

$$(x - a)T = 0, \quad (x - a)T = \delta_b, \quad (x - a)T = \delta'_b,$$

$$(x - a)(x - b)T = 0, \quad (x - a)(x - b)T = 1.$$

Exercice 2.30. Résoudre dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ les équations différentielles suivantes :

$$xT' = 1, \quad x^2T' = 0, \quad xT' + T = \delta.$$

Exercice 2.31. Soit $a \in C^\infty(\mathbb{R})$, $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et $b \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ tels que $T' + aT = b$.

1. Calculer la dérivée de AT où $A(x) = \exp\left(\int_0^x a(t) dt\right)$.
2. En déduire que $T \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et que l'edo est satisfaite au sens classique.

Exercice 2.32. Soit la fonction $f(x, y) = -\ln |(x, y)|$. Montrer que $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$ puis calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ ainsi que Δf dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

Exercice 2.33. Soient Ω et Ω' deux ouverts de $\mathbb{R}^N$ et soit $\Phi : \Omega \rightarrow \Omega'$ un C^∞ -difféomorphisme.

1. Montrer que si $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, alors $\Phi^*(f) = f \circ \Phi^{-1} \in L^1_{loc}(\Omega')$ et expliciter le crochet $\langle \Phi^*(f), \varphi \rangle$ pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega')$.
2. Définir alors la distribution $\Phi^*(T)$ pour toute distribution T sur Ω .
3. Déterminer $\Phi_i^*(\delta)$ où $\Phi_1(x) = tg x$, $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $\Phi_2(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

2.3 Solutions

Solution 2.1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on voit que $\varphi_n(x) = \frac{1}{n} g\left(\frac{x}{n}\right)$ où g est la fonction de l'exercice 1.17. Par conséquent $\varphi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $\text{Supp } \varphi_n = [-n, n]$. De plus

$$\varphi_n^{(k)}(x) = \frac{1}{n^{k+1}} g^{(k)}\left(\frac{x}{n}\right), \quad x \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{N}^*,$$

d'où

$$\|\varphi_n^{(k)}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \frac{1}{n^{k+1}} \|g^{(k)}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Ainsi pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(\varphi_n^{(k)})_n$ converge vers 0 uniformément sur $\mathbb{R}$. Noter que $(\varphi_n)_n$ ne converge pas dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ car la condition de support n'est pas vérifiée : il n'existe aucun compact $K \subset \mathbb{R}$ tel que $[-n, n] \subset K$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Solution 2.2. Supposons φ non nulle, car dans le cas contraire les deux suites sont nulles. Clairement $(\varphi_n)_n \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et si $a > 0$ est un réel tel que $\text{Supp } \varphi \subset [-a, a]$ alors

$$\text{Supp } \varphi_n \subset \left[-\frac{a}{n}, \frac{a}{n}\right] \subset [-a, a], \quad \forall n \geq 1,$$

la condition de support est donc vérifiée. De plus pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\varphi_n^{(k)}(x) = n^k e^{-n} \varphi^{(k)}(nx), \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \geq 1,$$

de sorte que

$$\|\varphi_n^{(k)}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq n^k e^{-n} \|\varphi^{(k)}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

c'est-à-dire $\varphi_n^{(k)} \rightarrow 0$ uniformément sur $\mathbb{R}$, $\forall k \in \mathbb{N}$. On conclut que $(\varphi_n)_n$ converge vers 0 dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Considérons maintenant la suite $(\psi_n)_n$ et supposons que $\text{Supp } \varphi = [a, b]$ alors $\text{Supp } \psi_n = [a - n, b - n]$ et il n'existe aucun compact $K \subset \mathbb{R}$ tel que $[a - n, b - n] \subset K$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, de sorte que $(\psi_n)_n$ ne vérifie pas la condition de support et donc la suite $(\psi_n)_n$ ne converge pas dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Néanmoins on vérifie facilement que $\psi_n^{(k)} \rightarrow 0$ uniformément sur $\mathbb{R}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Solution 2.3. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, alors $f * \varphi$ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^N$ et elle est à support compact car $\text{Supp } f$ et $\text{Supp } \varphi$ sont compacts. Par conséquent L est bien définie de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. De plus L est linéaire car

$$f * (\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha f * \varphi + \beta f * \psi, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N).$$

Vérifions la continuité. Soit $(\varphi_n)_n \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ telle que $\varphi_n \rightarrow 0$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. Alors il existe un compact $K \subset \mathbb{R}^N$ tel que

$$\text{Supp } \varphi_n \subset K, \quad \forall n,$$

et

$$\partial^\alpha \varphi_n \rightarrow 0 \quad \text{uniformément sur } \mathbb{R}^N, \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^N.$$

Par conséquent

$$\text{Supp}(f * \varphi_n) \subset \text{Supp } f + K, \quad \forall n,$$

et $\text{Supp } f + K$ est un compact de $\mathbb{R}^N$. De plus pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^N$

$$\partial^\alpha(f * \varphi_n) = f * (\partial^\alpha \varphi_n),$$

et en utilisant l'inégalité de Young et l'inclusion $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \subset L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq p \leq \infty$, on écrit

$$\|f * (\partial^\alpha \varphi_n)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \|\partial^\alpha \varphi_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}.$$

On voit alors que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f * (\partial^\alpha \varphi_n)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\partial^\alpha(f * \varphi_n) \rightarrow 0 \quad \text{uniformément sur } \mathbb{R}^N, \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^N.$$

On conclut que $L(\varphi_n) \rightarrow 0$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, donc L est continue.

Solution 2.4. Notons $I =]a, b[$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

1) $\triangleright$ Soit $\varphi \in \mathcal{D}(I)$, supposons qu'il existe une fonction $\psi \in \mathcal{D}(I)$ telle que $\varphi = \psi'$. Alors

$$\int_I \varphi(x) dx = \psi(x) \Big|_a^b = 0,$$

car ψ est nulle en dehors d'un compact de I .

$\triangleright$ Réciproquement soit $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ vérifiant la condition $\int_I \varphi(x) dx = 0$, posons

$$\psi(x) = \int_a^x \varphi(t) dt, \quad x \in I.$$

Clairement ψ est dérivable sur I et $\psi' = \varphi$ donc $\psi \in \mathcal{C}^\infty(I)$. Montrons que ψ est à support compact et pour cela supposons que $\text{Supp } \varphi \subset [c, d] \subset I$ de sorte que φ est nulle sur $]a, c[\cup]d, b[$.

i) Si $a < x < c$ alors $\psi(x) = \int_a^x 0 dt = 0.$

ii) Si $d < x < b$, alors $\psi(x) = \int_c^d \varphi(t) dt = \int_I \varphi(t) dt = 0.$

Ainsi $\text{Supp } \psi \subset [c, d]$ et on conclut que $\psi \in \mathcal{D}(I)$.

2) Soit $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\varphi - \lambda\varphi_0 \in \mathcal{D}(I)$ et

$$\int_I (\varphi - \lambda\varphi_0)(x) dx = \int_I \varphi(x) dx - \lambda \int_I \varphi_0(x) dx = 0, \quad \text{si } \lambda = \int_I \varphi(x) dx.$$

Donc pour cette valeur de λ , on déduit de la première question que $\varphi - \lambda\varphi_0$ admet une primitive ψ dans $\mathcal{D}(I)$ c'est-à-dire

$$\varphi = \lambda\varphi_0 + \psi'. \quad (2.2)$$

Supposons maintenant que $\varphi - \lambda\varphi_0$ admet une autre primitive ξ dans $\mathcal{D}(I)$. Alors il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $\psi - \xi = C$. Comme $\psi - \xi$ est à support compact alors nécessairement $C = 0$ et donc $\psi = \xi$. Ainsi la décomposition (2.2) de la fonction φ est unique.

Solution 2.5. Clairement T est bien définie sur $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$, elle est linéaire et de plus pour $\varphi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$, on a

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq |\varphi(0)| + \int_0^1 |\varphi(x)| dx \leq 2\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R})}.$$

On conclut que T est continue sur $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$, elle définit donc une mesure de Radon sur $\mathbb{R}$.

Solution 2.6. $\diamond$ Les fonctions $|x|$ et $\sqrt{|x|}$ sont continues sur $\mathbb{R}$, elles sont donc localement intégrables sur $\mathbb{R}$ et définissent des distributions sur $\mathbb{R}$.

$\diamond$ Les fonctions $\frac{1}{\sqrt{|x|}}$, $\frac{1}{x}$, $\sin \frac{1}{x}$, $\ln |x|$ sont continues sur $\mathbb{R}^*$, elles sont donc localement intégrables sur $\mathbb{R}$ si et seulement si elles sont intégrables au voisinage de 0. On a

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx &= 2 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 4\sqrt{x} \Big|_0^1 = 4, \\ \int_{-1}^1 |\ln |x|| dx &= -2 \int_0^1 \ln x dx = -2(x \ln x - x) \Big|_0^1 = 2, \\ \int_{-1}^1 \left| \sin \frac{1}{x} \right| dx &\leq \int_{-1}^1 dx = 2, \end{aligned}$$

donc les fonctions $\frac{1}{\sqrt{|x|}}$, $\sin \frac{1}{x}$, $\ln |x|$ définissent des distributions sur $\mathbb{R}$. Par contre

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{|x|} dx = 2 \int_0^1 \frac{1}{x} dx = 2 \ln x \Big|_0^1 = +\infty,$$

donc la fonction $\frac{1}{x}$ ne définit pas une distribution sur $\mathbb{R}$.

Solution 2.7. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $0 \leq \varphi \leq 1$ sur $\mathbb{R}$ et $\varphi = 1$ sur $[1, 2]$. On sait que $(\varphi_n)_n \subset \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $\varphi_n \rightarrow 0$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ (voir exercice 2.2).

Si la fonction $e^{\frac{1}{x^2}}$ définissait une distribution sur $\mathbb{R}$, alors par continuité on aurait

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{1}{x^2}} \varphi_n(x) dx = 0.$$

On déduit donc que si (2.1) a lieu alors la fonction $e^{\frac{1}{x^2}}$ ne définit pas une distribution sur $\mathbb{R}$.

Montrons (2.1). Comme $\varphi_n \geq 0$ et $\varphi_n = e^{-n}$ sur $]\frac{1}{n}, \frac{2}{n}[$, alors

$$\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{1}{x^2}} \varphi_n(x) dx \geq e^{-n} \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} e^{\frac{1}{x^2}} dx \geq e^{-n} \frac{1}{n} e^{\frac{n^2}{4}}, \quad \forall n \geq 1,$$

avec $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} e^{\frac{n^2}{4} - n} = +\infty$, on déduit le résultat.

Solution 2.8. $\triangleright T_1$ n'est pas linéaire puisque $T_1(2\varphi) \neq 2T_1(\varphi)$ pour $\varphi \neq 0$ donc T_1 ne définit pas une distribution sur $\mathbb{R}$.

$\triangleright$ Clairement $T_2 : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ est bien définie et linéaire et on a :

$$|T_2(\varphi)| \leq \|\varphi'\|_{L^\infty(\mathbb{R})}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

En particulier, pour tout compact $K \subset \mathbb{R}$

$$|T_2(\varphi)| \leq \sum_{k=0}^1 \|\varphi^{(k)}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R}).$$

Donc T_2 est continue sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ et définit donc une distribution sur $\mathbb{R}$ d'ordre ≤ 1 . Montrons maintenant qu'elle est d'ordre 1, par l'absurde. Supposons que T_2 est d'ordre 0, alors pour tout compact $K \subset \mathbb{R}$, il existe une constante $C_K > 0$ telle que

$$|\langle T_2, \varphi \rangle| \leq C_K \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R})}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R}). \quad (2.3)$$

Soit $\varphi_n(x) = (x - a) \theta(n(x - a))$ où $\theta \in \mathcal{D}([-1, 1])$ est une fonction plateau subordonnée au compact $\{0\}$, donc $0 \leq \theta \leq 1$ et $\theta = 1$ sur un voisinage de 0. Noter que $\varphi_n = x - a$ sur un voisinage de a et $\text{Supp } \varphi_n \subset]a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}[$, $\forall n \geq 1$, de sorte que

$$\|\varphi_n\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Soit $K = [a - 1, a + 1]$, alors $\varphi_n \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R})$, $\forall n \geq 2$ et d'après (2.3)

$$|\langle T_2, \varphi_n \rangle| \leq C_K \|\varphi_n\|_{L^\infty(\mathbb{R})}, \quad \forall n \geq 2.$$

Or $\langle T_2, \varphi_n \rangle = \varphi_n'(a) = 1$ donc l'inégalité précédente entraîne

$$1 \leq C_K \frac{1}{n}, \quad \forall n \geq 2,$$

ce qui est absurde. On conclut donc que T_2 est une distribution d'ordre 1 sur $\mathbb{R}$.

▷ T_3 est bien définie sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ car $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$ mais T_3 ne définit pas une distribution sur $\mathbb{R}$ car elle n'est pas linéaire : $T_3(-\varphi) \neq -T_3(\varphi)$ pour $\varphi \neq 0$.

▷ Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\text{Supp } \varphi \subset [-n_0, n_0]$, alors $T_4(\varphi) = \sum_{n=0}^{n_0} \varphi(n)$ donc T_4 est bien définie sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Clairement T_4 est linéaire et de plus

$$|\langle T_4, \varphi \rangle| \leq (n_0 + 1) \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R})}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}); \text{ Supp } \varphi \subset [-n_0, n_0].$$

On conclut que T_4 est une distribution d'ordre 0 sur $\mathbb{R}$, c'est donc une mesure de Radon. En fait $T_4 = \sum_{n \geq 0} \delta_n$.

▷ Clairement T_5 définit une distribution sur $\mathbb{R}$ d'ordre $\leq k$. En fait elle est d'ordre k exactement. En effet supposons que T_5 est une distribution d'ordre $\leq k-1$, alors pour le compact $K = [a-1, a+1]$, il existe une constante $C_K > 0$ telle que

$$|\langle T_5, \varphi \rangle| \leq C_K \sum_{l=0}^{k-1} \|\varphi^{(l)}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R}).$$

Soit $\varphi_n(x) = \frac{(x-a)^k}{k!} \theta(n(x-a))$ où $\theta \in \mathcal{D}([-1, 1])$ est une fonction plateau subordonnée au compact $\{0\}$. Comme $\text{Supp } \varphi_n \subset K$, $\forall n \geq 2$, alors

$$|\langle T_5, \varphi_n \rangle| \leq C_K \sum_{l=0}^{k-1} \|\varphi_n^{(l)}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}, \quad \forall n \geq 2. \quad (2.4)$$

Or $\varphi_n(x) = \frac{(x-a)^k}{k!}$ au voisinage de a , donc $\varphi_n^{(k)}(a) = 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$, d'où

$$|\langle T_5, \varphi_n \rangle| = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Maintenant, nous allons estimer $\|\varphi_n^{(l)}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$ pour $0 \leq l \leq k-1$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\left(\frac{(x-a)^k}{k!} \right)^{(m)} = \frac{(x-a)^{k-m}}{(k-m)!}, \quad 0 \leq m \leq k-1,$$

donc d'après la formule de Leibnitz

$$\varphi_n^{(l)}(x) = \sum_{m=0}^l \mathcal{C}_l^m \frac{(x-a)^{k-m}}{(k-m)!} n^{l-m} \theta^{(l-m)}(n(x-a)),$$

et comme $\text{Supp } \varphi_n \subset]a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}[$ alors

$$\begin{aligned} \|\varphi_n^{(l)}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} &= \|\varphi_n^{(l)}\|_{L^\infty(]a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}[)} \\ &\leq \sum_{m=0}^l \mathcal{C}_l^m \frac{n^{l-m}}{(k-m)! n^{k-m}} \|\theta^{(l-m)}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \frac{C}{n^{k-l}}, \end{aligned}$$

où $C = \sum_{m=0}^l \mathcal{C}_l^m \frac{1}{(k-m)!} \|\theta^{(l-m)}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$. Comme $k-l \geq 1$, alors $\frac{1}{n^{k-l}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, et donc chaque terme du second membre de l'inégalité (2.4) tend vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$, donc (2.4) est absurde et on conclut que T_5 est une distribution d'ordre k . On notera que $T_5 = (-1)^k \delta_a^{(k)}$.

▷ Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $a > 0$ tel que $\text{Supp } \varphi \subset [-a, a]$, alors

$$T_6(\varphi) = \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} \varphi(x^2) dx$$

donc T_6 est bien définie sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ et elle est linéaire. De plus

$$|\langle T_6, \varphi \rangle| \leq 2\sqrt{a} \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R})}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}); \text{ Supp } \varphi \subset [-a, a],$$

par conséquent T_6 est une distribution d'ordre 0 sur $\mathbb{R}$, c'est donc une mesure de Radon. En écrivant

$$T_6(\varphi) = 2 \int_0^\infty \varphi(x^2) dx = \int_0^\infty \varphi(y) \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int_{\mathbb{R}} \varphi(y) \frac{H(y)}{\sqrt{y}} dy,$$

on voit que T_6 est la distribution associée à la fonction $\frac{H}{\sqrt{|y|}} \in L_{loc}^1(\mathbb{R})$, notée aussi $\frac{H}{\sqrt{y}}$.

Solution 2.9. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\text{Supp } \varphi \subset [-n_0, n_0]$, alors

$$T(\varphi) = \sum_{k=0}^{n_0} \varphi^{(k)}(k),$$

donc T est bien définie sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. De plus T est linéaire et vérifie

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq \sum_{k=0}^{n_0} \|\varphi^{(k)}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}); \text{ Supp } \varphi \subset [-n_0, n_0].$$

On conclut que T est une distribution sur $\mathbb{R}$.

Montrons qu'elle est d'ordre infini, par l'absurde. Supposons que T est une distribution d'ordre $\leq m$, alors pour le compact $K = [m, m+2]$, il existe une constante $C_m > 0$ telle que

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C_m \sum_{l=0}^m \|\varphi^{(l)}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R}).$$

Soit $\varphi_n(x) = \frac{(x-m-1)^{m+1}}{(m+1)!} \theta(n(x-m-1))$ où $\theta \in \mathcal{D}([-1, 1])$ est une fonction plateau subordonnée au compact $\{0\}$. Comme $\text{Supp } \varphi_n \subset]m+1 - \frac{1}{n}, m+1 + \frac{1}{n}[\subset K$, $\forall n \geq 2$, alors

$$|\langle T, \varphi_n \rangle| \leq C_m \sum_{l=0}^m \|\varphi_n^{(l)}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}, \quad \forall n \geq 2.$$

Or $\langle T, \varphi_n \rangle = \varphi_n^{(m+1)}(m+1) = 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$, et l'inégalité précédente s'écrit

$$1 \leq C_m \sum_{l=0}^m \|\varphi_n^{(l)}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}, \quad \forall n \geq 2.$$

De plus,

$$\left(\frac{(x-m-1)^{m+1}}{(m+1)!} \right)^{(k)} = \frac{(x-m-1)^{m+1-k}}{(m+1-k)!}, \quad 0 \leq k \leq m,$$

alors en procédant comme dans l'exercice précédent, on obtient pour $0 \leq l \leq m$

$$\begin{aligned} \|\varphi_n^{(l)}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} &= \|\varphi_n^{(l)}\|_{L^\infty([m+1-\frac{1}{n}, m+1+\frac{1}{n}])} \\ &\leq \sum_{k=0}^l C_l^k \frac{n^{l-k}}{(m+1-k)! n^{m+1-k}} \|\theta^{(l-k)}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \frac{C}{n^{m+1-l}}, \end{aligned}$$

où $C > 0$ est une constante indépendante de n . On conclut comme dans l'exercice précédent puisque $m+1-l \geq 1$.

Solution 2.10. Rappelons que la distribution $Vp \frac{1}{x}$ est définie par

$$\langle Vp \frac{1}{x}, \varphi \rangle = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \int_{|x| \geq \theta} \frac{\varphi(x)}{x} dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),$$

et qu'elle est d'ordre inférieur ou égal à 1. Supposons qu'elle est d'ordre 0, c'est-à-dire que pour tout compact $K \subset \mathbb{R}$, il existe une constante $C_K > 0$ telle que

$$|\langle Vp \frac{1}{x}, \varphi \rangle| \leq C_K \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R})}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R}).$$

Considérons en particulier $K = [0, 2]$ et pour chaque $0 < \varepsilon < 1$, la fonction $\varphi_\varepsilon \in \mathcal{D}([0, 2])$ telle que $0 \leq \varphi_\varepsilon \leq 1$ et $\varphi_\varepsilon = 1$ sur $[\varepsilon, 1]$. Alors $\varphi_\varepsilon \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R})$ et

$$|\langle Vp \frac{1}{x}, \varphi_\varepsilon \rangle| \leq C_K \|\varphi_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R})}, \quad 0 < \varepsilon < 1. \quad (2.5)$$

D'un autre côté

$$\langle Vp \frac{1}{x}, \varphi_\varepsilon \rangle \geq \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = -\ln \varepsilon,$$

de sorte que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \langle Vp \frac{1}{x}, \varphi_\varepsilon \rangle = +\infty$, tandis que $\|\varphi_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = 1$ pour $0 < \varepsilon < 1$, ce qui contredit (2.5). Par conséquent la distribution $Vp \frac{1}{x}$ est bien d'ordre 1.

Solution 2.11. 1) $\int_0^1 \left| \frac{H(x)}{x} \right| dx = \int_0^1 \frac{dx}{x} = +\infty$, donc $\frac{H}{x} \notin L^1_{loc}(\mathbb{R})$ et ne définit pas une distribution sur $\mathbb{R}$.

2) Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et soit $a > 0$ tel que $\text{Supp } \varphi \subset [-a, a]$. Pour tout $\varepsilon > 0$ petit, on écrit

$$\int_{x \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \int_{\varepsilon \leq x \leq a} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx + \varphi(0) \int_{\varepsilon \leq x \leq a} \frac{dx}{x},$$

donc

$$\int_{x \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \varphi(0) \ln \varepsilon = \int_{\varepsilon \leq x \leq a} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx + \varphi(0) \ln a.$$

Considérons la fonction

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ \varphi'(0) & \text{sinon.} \end{cases}$$

$\psi \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ donc $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon \leq x \leq a} \psi(x) dx = \int_0^a \psi(x) dx$ et $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_{x \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \varphi(0) \ln \varepsilon \right]$ existe et est finie, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ donc $Pf \frac{H}{x}$ est bien définie sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ et de plus

$$\langle Pf \frac{H}{x}, \varphi \rangle = \int_0^a \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx + \varphi(0) \ln a, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}); \quad \text{Supp } \varphi \subset [-a, a]. \quad (2.6)$$

On vérifie facilement que l'application $Pf \frac{H}{x}$ est linéaire, montrons que $Pf \frac{H}{x}$ est continue.

Soit $K \subset \mathbb{R}$ un compact et $a > 0$ tel que $K \subset [-a, a]$. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R})$, la valeur de $\langle Pf \frac{H}{x}, \varphi \rangle$ est donnée par l'expression (2.6). Pour $0 < x < a$, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c_x \in]0, x[$ tel que $\varphi(x) - \varphi(0) = x\varphi'(c_x)$ donc

$$\begin{aligned} |\langle Pf \frac{H}{x}, \varphi \rangle| &\leq \int_0^a |\varphi'(c_x)| dx + |\varphi(0)| |\ln a| \\ &\leq a \|\varphi'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + |\ln a| \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \\ &\leq C (\|\varphi'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R})}), \end{aligned}$$

où $C = \max(a, |\ln a|)$ et on conclut que $Pf \frac{H}{x}$ est continue sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Par conséquent $Pf \frac{H}{x}$ définit une distribution sur $\mathbb{R}$ (d'ordre ≤ 1).

3) Posons $T = Pf \frac{H}{x}$, $S_1 = T|_{]-\infty, 0[}$ et $S_2 = T|_{]0, +\infty[}$. On a

$$\langle S_1, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(]-\infty, 0[),$$

c'est-à-dire que $S_1 = 0$.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(]0, +\infty[)$, alors $\text{Supp } \varphi \subset [a', a]$ avec $0 < a' < a$, donc $\varphi(0) = 0$ et en utilisant

l'expression (2.6), on voit que

$$\langle S_2, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle = \int_0^a \frac{\varphi(x)}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \langle f, \varphi \rangle,$$

où la fonction $f(x) = \frac{1}{x} \in L_{loc}^1(]0, +\infty[)$. Donc la distribution S_2 coïncide avec la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in]0, +\infty[$.

4) Déterminons une relation simple entre la distribution $T = Pf \frac{H}{x}$, sa symétrique par rapport à l'origine $\check{T}$ et $Vp \frac{1}{x}$. Rappelons que $\check{T}(x) = T(-x)$ est définie par

$$\langle T(-x), \varphi(x) \rangle = \langle T(y), \varphi(-y) \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, en utilisant le changement de variable $x = -y$, on voit que

$$\langle \check{T}, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(-y)}{y} dy + \varphi(0) \ln \varepsilon \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[- \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \varphi(0) \ln \varepsilon \right],$$

de sorte que

$$\langle T - \check{T}, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right] = \langle Vp \frac{1}{x}, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

On conclut alors que

$$T - \check{T} = Vp \frac{1}{x}.$$

5) Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \langle xPf \frac{H}{x}, \varphi \rangle &= \langle Pf \frac{H}{x}, x\varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{x \geq \varepsilon} \frac{x\varphi(x)}{x} dx + 0\varphi(0) \ln \varepsilon \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{x \geq \varepsilon} \varphi(x) dx = \int_0^{+\infty} \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} H(x)\varphi(x) dx, \end{aligned}$$

donc

$$xPf \frac{H}{x} = H.$$

Solution 2.12. Montrons que pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe une constante $C_K > 0$ telle que

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C_K \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c(\Omega); \text{ Supp } \varphi \subset K.$$

Notons d'abord que puisque T est linéaire, la propriété

$$\langle T, \varphi \rangle \geq 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c(\Omega), \quad \varphi \geq 0,$$

entraîne que si $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{C}_c(\Omega)$ sont telles que $\varphi_1 \geq \varphi_2$, alors nécessairement

$$\langle T, \varphi_1 \rangle - \langle T, \varphi_2 \rangle = \langle T, \varphi_1 - \varphi_2 \rangle \geq 0.$$

On dit que l'application T est croissante sur $\mathcal{C}_c(\Omega)$.

Soit K un compact de Ω et soit $\theta \in \mathcal{D}(\Omega)$ une fonction plateau subordonnée au compact K donc $0 \leq \theta \leq 1$ sur Ω et $\theta = 1$ sur un voisinage de K . Pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}_c(\Omega)$ à support dans K , on a $\theta\varphi = \varphi$ sur Ω d'où

$$-\theta(x) \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \theta(x) \varphi(x) = \varphi(x) \leq \theta(x) \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad \forall x \in \Omega.$$

Comme T est linéaire et croissante sur $\mathcal{C}_c(\Omega)$, on déduit

$$-\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \langle T, \theta \rangle \leq \langle T, \varphi \rangle \leq \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \langle T, \theta \rangle,$$

avec $\langle T, \theta \rangle \geq 0$ et ne dépendant pas de φ . Cela signifie que

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq \langle T, \theta \rangle \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

En posant $C_K = \max(1, \langle T, \theta \rangle) > 0$, on obtient le résultat souhaité.

Solution 2.13. 1) Soit $1 \leq p < \infty$ et $(f_n)_n \subset L^p(\Omega)$ qui converge vers f faiblement dans $L^p(\Omega)$, c'est-à-dire $\forall g \in (L^p(\Omega))' = L^q(\Omega)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g(f_n - f) dx = 0.$$

Comme $\mathcal{D}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ alors l'égalité précédente est vraie pour $g \in \mathcal{D}(\Omega)$, ce qui signifie que

$$f_n \rightarrow f \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Réciproquement soit $f_n = \frac{n}{2} 1_{[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]}$. Clairement $(f_n)_n \subset L^p(\mathbb{R})$, pour tout p tel que $1 \leq p \leq \infty$ et voir exercice 2.14

$$f_n \rightarrow \delta \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}),$$

et comme δ n'est pas une fonction, alors $(f_n)_n$ ne converge faiblement dans aucun $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$.

Ainsi la convergence au sens des distributions n'implique pas la convergence faible dans $L^p(\Omega)$.

2) Soit $1 < p < \infty$ et $M > 0$ tel que

$$\|f_n\|_{L^p(\Omega)} \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

a) Soit $g \in (L^p(\Omega))' = L^q(\Omega)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, posons

$$u_n = \int_{\Omega} g f_n dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Soit $\varepsilon > 0$, comme $q < \infty$, $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^q(\Omega)$ donc il existe $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que

$$\|g - \varphi\|_{L^q(\Omega)} < \frac{\varepsilon}{4M}.$$

Soient $m, n \in \mathbb{N}$, on écrit

$$u_n - u_m = \int_{\Omega} g(f_n - f_m) dx = \int_{\Omega} (g - \varphi)(f_n - f_m) dx + \int_{\Omega} \varphi(f_n - f_m) dx.$$

Comme la suite $\left(\int_{\Omega} \varphi f_n dx \right)_n$ est convergente alors elle est de Cauchy : il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\left| \int_{\Omega} \varphi(f_n - f_m) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n, m > n_0.$$

Ensuite d'après l'inégalité de Hölder et l'inégalité triangulaire

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} (g - \varphi)(f_n - f_m) dx \right| &\leq \|g - \varphi\|_{L^q(\Omega)} \|f_n - f_m\|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq \|g - \varphi\|_{L^q(\Omega)} (\|f_n\|_{L^p(\Omega)} + \|f_m\|_{L^p(\Omega)}) \\ &< \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n, m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$|u_n - u_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad \forall n, m > n_0$$

ce qui signifie que la suite $(u_n)_n$ est de Cauchy et donc convergente. Notons u_g sa limite et définissons l'application

$$L : g \in L^q(\Omega) \mapsto u_g \in \mathbb{R}.$$

La forme L est linéaire, montrons qu'elle est continue sur $L^q(\Omega)$. Soit $g \in L^q(\Omega)$, comme

$$|u_n| \leq \|g\|_{L^q(\Omega)} \|f_n\|_{L^p(\Omega)} \leq M \|g\|_{L^q(\Omega)}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

alors à la limite, on a aussi

$$|u_g| \leq M \|g\|_{L^q(\Omega)},$$

c'est-à-dire

$$|L(g)| \leq M \|g\|_{L^q(\Omega)}, \quad \forall g \in L^q(\Omega).$$

Ainsi L est continue sur $L^q(\Omega)$.

Remarque : On aurait pu déduire la continuité de L en utilisant un corollaire du théorème de Banach-Steinhaus.

On a donc $L \in (L^q(\Omega))'$, par conséquent il existe une unique fonction $f \in L^p(\Omega)$ telle que

$$L(g) = \int_{\Omega} f g dx, \quad \forall g \in L^q(\Omega).$$

On a donc montré que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n g \, dx = \int_{\Omega} f g \, dx, \quad \forall g \in L^q(\Omega),$$

ce qui signifie que la suite $(f_n)_n$ converge faiblement dans $L^p(\Omega)$ vers f .

b) D'après la question 1), puisque $(f_n)_n$ converge faiblement dans $L^p(\Omega)$ vers f alors $(f_n)_n$ converge vers f (c'est-à-dire T_f la distribution associée à f) au sens des distributions. L'unicité de la limite dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ implique $T = T_f$.

3) Soit $1 < p < \infty$.

▷ Les conditions sont nécessaires :

On sait déjà que la convergence faible dans $L^p(\Omega)$ implique la convergence au sens des distributions : c'est le résultat de la question 1). De plus la convergence faible d'une suite $(f_n)_n$ dans $L^p(\Omega)$ implique qu'elle est bornée dans $L^p(\Omega)$, d'après un corollaire du théorème de Banach-Steinhaus. En effet, soit

$$L_n : g \in E = L^q(\Omega) \mapsto \int_{\Omega} g f_n \, dx, \quad n \in \mathbb{N},$$

alors $L_n \in E'$ et $\|L_n\|_{E'} = \|f_n\|_{L^p(\Omega)}$. Or pour tout $g \in E$, la suite $(L_n(g))_n = \left(\int_{\Omega} g f_n \, dx \right)_n$ est convergente donc

$$\sup \|L_n\|_{E'} = \sup \|f_n\|_{L^p(\Omega)} < \infty.$$

▷ Les conditions sont suffisantes : Nous l'avons montré dans la question 2).

▷ Contre-exemple dans $L^1(\mathbb{R})$: Considérons la suite $(f_n)_n$ donnée dans la question 1). Elle converge au sens des distributions et elle est bornée dans $L^1(\mathbb{R})$ puisque

$$\|f_n\|_{L^1(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} |f_n(x)| \, dx = \frac{n}{2} \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} dx = 1, \quad \forall n \geq 1,$$

et pourtant elle ne converge pas faiblement dans $L^1(\mathbb{R})$.

Solution 2.14. 1) Chaque fonction $f_n \in L^\infty(\mathbb{R})$ donc elle définit une distribution sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\langle f_n, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f_n(x) \varphi(x) \, dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et soit ψ une primitive de φ , on a

$$\langle f_n, \varphi \rangle = \frac{n}{2} \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \varphi(x) \, dx = \frac{n}{2} \left(\psi\left(\frac{1}{n}\right) - \psi\left(-\frac{1}{n}\right) \right).$$

Au voisinage de l'infini, on peut écrire

$$\psi\left(\frac{1}{n}\right) = \psi(0) + \frac{1}{n} \psi'(0) + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad \psi\left(-\frac{1}{n}\right) = \psi(0) - \frac{1}{n} \psi'(0) + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

de sorte que

$$\langle f_n, \varphi \rangle = \psi'(0) + o(1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \psi'(0) = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle.$$

On conclut que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \delta \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

On peut aussi écrire

$$\langle f_n, \varphi \rangle = \frac{n}{2} \left(\psi\left(\frac{1}{n}\right) - \psi\left(\frac{-1}{n}\right) \right) = \psi'(c_n) = \varphi(c_n),$$

avec $c_n \in]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$ et on retrouve le résultat.

2) Pour tout $n \geq 1$, $g_n \in L^\infty(\mathbb{R})$ donc elle définit une distribution sur $\mathbb{R}$ et

$$\langle g_n, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} g_n(x) \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et ψ une primitive de φ , on écrit

$$\begin{aligned} \langle g_n, \varphi \rangle &= -n \int_{-\frac{1}{n}}^0 \varphi(x) dx + n \int_0^{\frac{1}{n}} \varphi(x) dx \\ &= n \left(\psi\left(\frac{-1}{n}\right) - \psi(0) \right) + n \left(\psi\left(\frac{1}{n}\right) - \psi(0) \right) = \varphi(d_n) - \varphi(c_n), \end{aligned}$$

où $c_n \in]-\frac{1}{n}, 0[$ et $d_n \in]0, \frac{1}{n}[$. Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(c_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(d_n) = \varphi(0)$, on déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle g_n, \varphi \rangle = 0$ et donc

$$g_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

3) $h_n \in L^\infty(\mathbb{R})$ donc h_n définit une distribution sur $\mathbb{R}$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, en utilisant une intégration par parties, on écrit

$$\langle h_n, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \sin(nx) \varphi(x) dx = \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}} \cos(nx) \varphi'(x) dx.$$

Par conséquent

$$|\langle h_n, \varphi \rangle| \leq \frac{1}{n} \|\varphi'\|_{L^1(\mathbb{R})} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

donc

$$h_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

4) Pour tout $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}^*$, $|k_n(x)| \leq n$ donc $k_n \in L^\infty(\mathbb{R})$ et définit une distribution sur $\mathbb{R}$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\langle k_n, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(nx)}{x} \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \sin(nx) \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx + \varphi(0) \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(nx)}{x} dx,$$

avec

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(nx)}{x} dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin t}{t} dt = \pi, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

En appliquant l'identité $g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(t) dt$ à la fonction $g(t) = \varphi(tx)$, on voit que la fonction

$$\psi(x) \equiv \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} = \int_0^1 \varphi'(tx) dt$$

est dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^*)$ et $\psi'(x) = \int_0^1 t\varphi''(tx) dt$. De plus, en posant $\psi(0) = \varphi'(0)$, on voit que $\psi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et $\psi'(0) = \int_0^1 t\varphi''(0) dt = \frac{1}{2}\varphi''(0)$. On notera également que

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \psi(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-\varphi(0)}{x} = 0.$$

En fait, on vérifie aisément que $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ et $\psi^{(k)}(0) = \frac{1}{k!}\varphi^{(k+1)}(0)$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Une intégration par parties donne

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \sin(nx) \psi(x) dx \right| = \frac{1}{n} \left| \int_{\mathbb{R}} \cos(nx) \psi'(x) dx \right| \leq \frac{1}{n} \|\psi'\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

En effet ψ' est continue sur $\mathbb{R}$ et pour $x \neq 0$, $\psi'(x) = \frac{x\varphi'(x) - \varphi(x) + \varphi(0)}{x^2}$, donc au voisinage de $\pm\infty$, on a $\psi'(x) = \frac{\varphi(0)}{x^2}$ et est donc intégrable. Par conséquent

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle k_n, \varphi \rangle = \pi\varphi(0), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),$$

et donc

$$k_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \pi\delta \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

5) $l_n \in L^\infty(\mathbb{R})$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on écrit $l_n(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2nx))$, de sorte que

$$\langle l_n, \varphi \rangle = \frac{1}{2}\langle 1, \varphi \rangle - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \cos(2nx) \varphi(x) dx,$$

et une intégration par parties donne

$$\int_{\mathbb{R}} \cos(2nx) \varphi(x) dx = \frac{-1}{2n} \int_{\mathbb{R}} \sin(2nx) \varphi'(x) dx.$$

Comme $\left| \int_{\mathbb{R}} \sin(2nx) \varphi'(x) dx \right| \leq \|\varphi'\|_{L^1(\mathbb{R})}$, on déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} \cos(2nx) \varphi(x) dx = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),$$

d'où

$$l_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

6) $m_n \in L^\infty(\mathbb{R})$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et soit $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\text{Supp } \varphi \subset [-N, N]$, on a

$$\langle m_n, \varphi \rangle = a_n \int_n^\infty \varphi(x) dx = 0, \quad \forall n > N,$$

donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle m_n, \varphi \rangle = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),$$

c'est-à-dire

$$m_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

7) $r_n \in L^\infty(\mathbb{R})$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on utilise le changement de variable $y = \sqrt{n}x$ et on écrit

$$\langle r_n, \varphi \rangle = \sqrt{n} \int_{\mathbb{R}} e^{-nx^2} \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} \varphi\left(\frac{y}{\sqrt{n}}\right) dy.$$

On a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-y^2} \varphi\left(\frac{y}{\sqrt{n}}\right) = e^{-y^2} \varphi(0), \quad \forall y \in \mathbb{R},$$

et

$$|e^{-y^2} \varphi\left(\frac{y}{\sqrt{n}}\right)| \leq \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R})} e^{-y^2},$$

donc d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle r_n, \varphi \rangle = \varphi(0) \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi} \varphi(0).$$

Ainsi

$$r_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\pi} \delta \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

8) $s_n \in L^\infty(\mathbb{R})$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, utilisons deux intégrations par parties successives pour écrire

$$\begin{aligned} \langle s_n, \varphi \rangle &= n \int_0^{+\infty} \sin(nx) \varphi(x) dx = \varphi(0) + \int_0^{+\infty} \cos(nx) \varphi'(x) dx \\ &= \varphi(0) - \frac{1}{n} \int_0^{+\infty} \sin(nx) \varphi''(x) dx. \end{aligned}$$

Comme $\left| \int_0^{+\infty} \sin(nx) \varphi''(x) dx \right| \leq \|\varphi''\|_{L^1(\mathbb{R})}$, on déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle s_n, \varphi \rangle = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),$$

d'où

$$s_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \delta \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

9) $t_n \in L^\infty(\mathbb{R})$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ d'où pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\langle t_n, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \exp(inx) \varphi(x) dx = -\frac{1}{in} \int_{\mathbb{R}} \exp(inx) \varphi'(x) dx,$$

et on conclut comme ci-dessus que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle t_n, \varphi \rangle = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),$$

c'est-à-dire

$$t_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

10) $u_n \in L^\infty(\mathbb{R})$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ d'où pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\langle u_n, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \left(\cos \frac{x}{\sqrt{n}} \right)^n \varphi(x) dx.$$

Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{x}{\sqrt{n}} \right)^n = e^{-\frac{x^2}{2}}$ et que $\left| \left(\cos \frac{x}{\sqrt{n}} \right)^n \right| \leq 1$, alors d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle u_n, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} \varphi(x) dx,$$

c'est-à-dire

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

Solution 2.15. Pour $n \geq 1$, on voit que

$$\langle T_n, \varphi \rangle = \left\langle Vp \frac{1}{x}, \cos(nx) \varphi \right\rangle = \left\langle \cos(nx) Vp \frac{1}{x}, \varphi \right\rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),$$

donc

$$T_n = \cos(nx) Vp \frac{1}{x} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad \forall n \geq 1,$$

car c'est le produit de la distribution $Vp \frac{1}{x}$ par la fonction $\cos(nx) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

Calculons $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et soit $a > 0$ tel que $\text{Supp } \varphi \subset [-a, a]$. Pour $\varepsilon > 0$

petit, comme $\int_{\varepsilon \leq |x| \leq a} \frac{\cos(nx)}{x} dx = 0$, on écrit

$$\begin{aligned} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\cos(nx)}{x} \varphi(x) dx &= \int_{\varepsilon \leq |x| \leq a} \cos(nx) \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx \\ &= \int_{\varepsilon \leq |x| \leq a} \cos(nx) \psi(x) dx, \end{aligned}$$

où la fonction ψ est définie par

$$\psi(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} \text{ si } x \neq 0, \quad \psi(0) = \varphi'(0).$$

Clairément $\psi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ donc

$$\langle T_n, \varphi \rangle = \int_{-a}^a \cos(nx) \psi(x) dx,$$

et à l'aide d'une intégration par parties, on vérifie comme dans l'exercice précédent, que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle T_n, \varphi \rangle = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Ainsi

$$T_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

Solution 2.16. 1) Notons d'abord que pour tout $\varepsilon > 0$, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x + i\varepsilon}$ est continue sur $\mathbb{R}$, elle est donc localement intégrable sur $\mathbb{R}$ et définit une distribution sur $\mathbb{R}$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\left\langle \frac{1}{x + i\varepsilon}, \varphi \right\rangle = \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x + i\varepsilon} dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{x\varphi(x)}{x^2 + \varepsilon^2} dx - i\varepsilon \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x^2 + \varepsilon^2} dx.$$

i) Soit $a > 0$ tel que $\text{Supp } \varphi \subset [-a, a]$. On a

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{x\varphi(x)}{x^2 + \varepsilon^2} dx = \int_{-a}^a \frac{x(\varphi(x) - \varphi(0))}{x^2 + \varepsilon^2} dx = \int_{-a}^a f_\varepsilon(x) dx,$$

où

$$f_\varepsilon(x) = \frac{x(\varphi(x) - \varphi(0))}{x^2 + \varepsilon^2}.$$

Comme $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} \equiv f(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ et que $|f_\varepsilon(x)| \leq |f(x)|$ pour tout $\varepsilon > 0$ avec $f \in \mathcal{C}([-a, a]) \subset L^1([-a, a])$ (on a prolongé f par continuité en 0) alors, en vertu du théorème de convergence dominée de Lebesgue, on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-a}^a f_\varepsilon(x) dx = \int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^a \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx = \langle Vp \frac{1}{x}, \varphi \rangle.$$

ii) A l'aide du changement de variable $x = \varepsilon y$, on écrit

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\varepsilon \varphi(x)}{x^2 + \varepsilon^2} dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{\varepsilon^2 \varphi(\varepsilon y)}{\varepsilon^2 (1 + y^2)} dy = \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(\varepsilon y)}{1 + y^2} dy,$$

et on passe à la limite lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, en utilisant le théorème de convergence dominée de Lebesgue.

En effet pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varphi(\varepsilon y)}{1 + y^2} = \frac{\varphi(0)}{1 + y^2}$ et $|\frac{\varphi(\varepsilon y)}{1 + y^2}| \leq \|\varphi\|_{L^\infty} \frac{1}{1 + y^2}$, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $y \in \mathbb{R}$ et puisque la fonction $y \mapsto \frac{1}{1 + y^2}$ est dans $L^1(\mathbb{R})$, alors on déduit que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(\varepsilon y)}{1 + y^2} dy = \varphi(0) \int_{\mathbb{R}} \frac{dy}{1 + y^2} = \pi \langle \delta, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Des points i) et ii), on conclut que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \langle \frac{1}{x + i\varepsilon}, \varphi \rangle = \langle Vp \frac{1}{x} - i\pi\delta, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),$$

c'est-à-dire

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{x + i\varepsilon} = Vp \frac{1}{x} - i\pi\delta \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

2) De la même manière, on montre que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{x - i\varepsilon} = Vp \frac{1}{x} + i\pi\delta \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

3) Pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$, $\frac{\varepsilon}{|x|^{1-\varepsilon}} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a

$$\langle \frac{\varepsilon}{|x|^{1-\varepsilon}}, \varphi \rangle = \varepsilon \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{|x|^{1-\varepsilon}} dx = \varepsilon \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(-y)}{y^{1-\varepsilon}} dy + \varepsilon \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x^{1-\varepsilon}} dx.$$

En intégrant par parties, on obtient

$$\langle \frac{\varepsilon}{|x|^{1-\varepsilon}}, \varphi \rangle = \int_0^{+\infty} y^\varepsilon \varphi'(-y) dy - \int_0^{+\infty} x^\varepsilon \varphi'(x) dx.$$

i) Soit $f_\varepsilon(x) = x^\varepsilon \varphi'(x)$, $x > 0$, $0 < \varepsilon < 1$ et soit

$$g(x) = \begin{cases} x|\varphi'(x)| & \text{si } x > 1, \\ |\varphi'(x)| & \text{si } 0 < x < 1. \end{cases}$$

Alors $g \in L^1(\mathbb{R}_+)$, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} f_\varepsilon(x) = \varphi'(x)$ pour $x > 0$ et $|f_\varepsilon(x)| \leq g(x)$ pour $x > 0$ et $0 < \varepsilon < 1$. En utilisant le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on conclut que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} x^\varepsilon \varphi'(x) dx = \int_0^{+\infty} \varphi'(x) dx = -\varphi(0).$$

ii) De la même manière

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} y^\varepsilon \varphi'(-y) dy = \int_0^{+\infty} \varphi'(-y) dy = \varphi(0).$$

Par conséquent

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \langle \frac{\varepsilon}{|x|^{1-\varepsilon}}, \varphi \rangle = 2\varphi(0),$$

de sorte que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\varepsilon}{|x|^{1-\varepsilon}} = 2\delta \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

Solution 2.17. 1) Noter que $S_n = (-1)^n \delta^{(n)}$, $n \geq 0$ et par définition, $\sum S_n$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ si et seulement si la série numérique $\sum \langle S_n, \varphi \rangle$ converge pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Soit $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ une fonction plateau telle que $\theta = 1$ au voisinage de 0. On considère la fonction $\varphi(x) = e^x \theta(x)$, alors $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et au voisinage de 0, $\varphi(x) = e^x$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi^{(n)}(x) = e^x$ au voisinage de 0. Ainsi

$$\langle S_n, \varphi \rangle = \varphi^{(n)}(0) = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Par conséquent, la série $\sum \langle S_n, \varphi \rangle$ est divergente et on conclut que la série de distributions $\sum S_n$ est divergente dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la fonction $T_n \in L^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et on a pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\langle T_n, \varphi \rangle = c_n \int_{\mathbb{R}} e^{inx} \varphi(x) dx.$$

a) Considérons d'abord le cas où $k = 0$ c'est-à-dire $|c_n| \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{Z}^*$. Après deux intégrations par parties, on obtient

$$\langle T_n, \varphi \rangle = c_n \left(\frac{-1}{in} \right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{inx} \varphi''(x) dx,$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$ de sorte que

$$|\langle T_n, \varphi \rangle| \leq \|\varphi''\|_{L^1(\mathbb{R})} \frac{1}{n^2}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^*,$$

et comme la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{n^2}$ converge, on déduit que la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle T_n, \varphi \rangle$ est absolument convergente et donc convergente.

b) Dans le cas général, on intègre par parties $(k+2)$ fois pour obtenir

$$\langle T_n, \varphi \rangle = c_n \left(\frac{-1}{in} \right)^{k+2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{inx} \varphi^{(k+2)}(x) dx, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^*,$$

ce qui implique

$$|\langle T_n, \varphi \rangle| \leq \frac{|n|^k}{n^{k+2}} \|\varphi^{(k+2)}\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|\varphi^{(k+2)}\|_{L^1(\mathbb{R})} \frac{1}{n^2}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^*,$$

et on déduit comme précédemment que la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle T_n, \varphi \rangle$ converge. En conclusion, la série $\sum T_n$ est convergente dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Solution 2.18. 1) la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ n'est pas localement intégrable sur $\mathbb{R}$ donc elle ne définit pas une distribution sur $\mathbb{R}$.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, soit $a > 0$ tel que $\text{Supp } \varphi \subset [-a, a]$, on a pour $\varepsilon > 0$ petit

$$\begin{aligned} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx &= \int_{\varepsilon \leq |x| \leq a} \frac{\varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi'(0)}{x^2} dx \\ &\quad + \varphi(0) \int_{\varepsilon \leq |x| \leq a} \frac{dx}{x^2} + \varphi'(0) \int_{\varepsilon \leq |x| \leq a} \frac{dx}{x}, \end{aligned}$$

la dernière intégrale étant nulle, d'où

$$\int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx - 2 \frac{\varphi(0)}{\varepsilon} = \int_{\varepsilon \leq |x| \leq a} \psi(x) dx - 2 \frac{\varphi(0)}{a},$$

où on a posé $\psi(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi'(0)}{x^2}$ si $x \neq 0$. La fonction ψ admet un prolongement par continuité en 0 (il suffit de poser $\psi(0) = \frac{\varphi''(0)}{2}$) donc

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx - 2 \frac{\varphi(0)}{\varepsilon} \right] = \int_{-a}^a \psi(x) dx - 2 \frac{\varphi(0)}{a}, \quad (2.7)$$

et on conclut que la forme $Pf \frac{1}{x^2}$ est bien définie sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. La linéarité est évidente, vérifions la continuité, à savoir que pour tout compact $K \subset \mathbb{R}$, il existe une constante $C_K > 0$ et un entier naturel m_K tels que

$$|\langle Pf \frac{1}{x^2}, \varphi \rangle| \leq C_K \sum_{k=0}^{m_K} \|\varphi^{(k)}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R}).$$

Soit K un compact et $a > 0$ tel que $K \subset [-a, a]$, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R})$, on a d'après (2.7)

$$|\langle Pf \frac{1}{x^2}, \varphi \rangle| \leq 2a \|\psi\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + \frac{2}{a} \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R})}.$$

Maintenant pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, il existe un réel c_x compris entre 0 et x tel que $\varphi(x) = \varphi(0) + x\varphi'(0) + \frac{x^2}{2}\varphi''(c_x)$, donc $\|\psi\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \frac{1}{2}\|\varphi''\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$, ce qui entraîne que

$$|\langle Pf \frac{1}{x^2}, \varphi \rangle| \leq C_K \sum_{k=0}^2 \|\varphi^{(k)}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R}),$$

avec $C_K = \max(a, \frac{2}{a})$. On déduit que $Pf \frac{1}{x^2}$ est une distribution sur $\mathbb{R}$ d'ordre inférieur ou égal à 2.

On procède de la même manière pour montrer que $Pf \frac{H}{x^2}$ est une distribution sur $\mathbb{R}$ d'ordre inférieur ou égal à 2.

On peut en fait vérifier que ces deux distributions sont d'ordre 2 exactement.

2) Soit $n \geq 3$, procédons comme dans le cas $n = 2$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, avec les notations ci-dessus, on écrit pour $\varepsilon > 0$ petit

$$\int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^n} dx = \int_{\varepsilon \leq |x| \leq a} \frac{\varphi(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} \varphi^{(k)}(0)}{x^n} dx + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} \int_{\varepsilon \leq |x| \leq a} \frac{dx}{x^{n-k}}.$$

On a

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} \int_{\varepsilon \leq |x| \leq a} \frac{dx}{x^{n-k}} = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n,k} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!(n-k-1)} \left(\frac{1}{\varepsilon^{n-k-1}} - \frac{1}{a^{n-k-1}} \right),$$

où $C_{n,k} = 0$ si $n-k$ est impair et $C_{n,k} = 2$ sinon. Ainsi

$$\begin{aligned} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^n} dx - \sum_{k=0}^{n-1} C_{n,k} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!(n-k-1)} \frac{1}{\varepsilon^{n-k-1}} = \\ \int_{\varepsilon \leq |x| \leq a} \psi_n(x) dx - \sum_{k=0}^{n-1} C_{n,k} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!(n-k-1)} \frac{1}{a^{n-k-1}}, \end{aligned}$$

où la fonction ψ_n est définie par

$$\psi_n(x) = \frac{\varphi(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} \varphi^{(k)}(0)}{x^n} \text{ si } x \neq 0, \quad \psi_n(0) = \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!},$$

de sorte que ψ_n est continue sur $\mathbb{R}$. On pose alors pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\langle Pf \frac{1}{x^n}, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^n} dx - \sum_{k=0}^{n-1} C_{n,k} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!(n-k-1)} \frac{1}{\varepsilon^{n-k-1}} \right).$$

On procédera de la même manière pour définir $Pf \frac{H}{x^n}$ et on vérifie que ces formes définissent des distributions d'ordre n sur $\mathbb{R}$.

Solution 2.19. 1) Les fonctions $x \mapsto \frac{1}{|x|^N}$ et $x \mapsto \frac{1}{|x|^{N+1}}$ ne sont pas localement intégrables sur $\mathbb{R}^N$ et donc ne définissent pas des distributions sur $\mathbb{R}^N$. En effet, voir l'exercice 1.11, $\int_{|x| \leq 1} \frac{1}{|x|^\alpha} < \infty$ si et seulement si $\alpha < N$.

2) a) $\triangleright$ Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ et soit $R > 0$ tel que $\text{Supp } \varphi \subset \overline{B}(0, R)$. Pour $\varepsilon > 0$ petit, on écrit

$$\int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{|x|^N} dx = \int_{\varepsilon \leq |x| \leq R} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{|x|^N} dx + \varphi(0) \int_{\varepsilon \leq |x| \leq R} \frac{dx}{|x|^N}.$$

On calcule la dernière intégrale en passant aux coordonnées polaires : $x = r\omega$ avec $\omega \in S^{N-1}$ (la sphère unité de $\mathbb{R}^N$) et $\varepsilon < r < R$,

$$\int_{\varepsilon \leq |x| \leq R} \frac{dx}{|x|^N} = \omega_N \int_{\varepsilon}^R \frac{r^{N-1}}{r^N} dr = \omega_N (\ln R - \ln \varepsilon),$$

ω_N étant la mesure de S^{N-1} . On a donc

$$\int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{|x|^N} dx + \omega_N \varphi(0) \ln \varepsilon = \int_{\varepsilon \leq |x| \leq R} \psi(x) dx + \omega_N \varphi(0) \ln R,$$

où $\psi(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{|x|^N}$, $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$.

Soit $x \in \mathbb{R}^N$, d'après le théorème des accroissements finis

$$|\varphi(x) - \varphi(0)| \leq \|\nabla \varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} |x|,$$

de sorte que

$$|\psi(x)| \leq \|\nabla \varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \frac{1}{|x|^{N-1}}, \quad x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}.$$

Comme $\int_{|x| \leq R} \frac{dx}{|x|^{N-1}} < \infty$, on déduit que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon \leq |x| \leq R} \psi(x) dx = \int_{|x| \leq R} \psi(x) dx.$$

Ainsi l'application $Pf \frac{1}{|x|^N}$ est bien définie sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ et

$$\langle Pf \frac{1}{|x|^N}, \varphi \rangle = \int_{|x| \leq R} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{|x|^N} dx + \omega_N \varphi(0) \ln R,$$

pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ à support dans $\overline{B(0, R)}$. Clairement cette forme est linéaire et avec les notations ci-dessus, on a :

$$\begin{aligned} |\langle Pf \frac{1}{|x|^N}, \varphi \rangle| &\leq \omega_N \|\nabla \varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \int_0^R \frac{r^{N-1}}{r^{N-1}} dr + \omega_N |\ln R| \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq \omega_N (|\ln R| \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + R \|\nabla \varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}), \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure que $Pf \frac{1}{|x|^N}$ est une distribution sur $\mathbb{R}^N$, d'ordre inférieur ou égal à 1.

▷ Montrons que $Pf \frac{1}{|x|^{N+1}}$ définit une distribution sur $\mathbb{R}^N$.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ et soit $R > 0$ tel que $\text{Supp } \varphi \subset \overline{B(0, R)}$, nous allons utiliser la formule de Taylor de φ en 0, à l'ordre 1

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x \cdot \nabla \varphi(0) + 2 \sum_{|\alpha|=2} \frac{x^\alpha}{\alpha!} \int_0^1 (1-t) \partial^\alpha \varphi(tx) dt.$$

Soit $\varepsilon > 0$ petit, on écrit

$$\int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{|x|^{N+1}} dx = \int_{\varepsilon \leq |x| \leq R} \frac{\varphi(x)}{|x|^{N+1}} dx = A_\varepsilon + B_\varepsilon + C_\varepsilon,$$

avec

$$\begin{aligned} A_\varepsilon &= \varphi(0) \int_{\varepsilon \leq |x| \leq R} \frac{1}{|x|^{N+1}} dx, \quad B_\varepsilon = \nabla \varphi(0) \cdot \int_{\varepsilon \leq |x| \leq R} \frac{x}{|x|^{N+1}} dx, \\ C_\varepsilon &= 2 \sum_{|\alpha|=2} \frac{1}{\alpha!} \int_{\varepsilon \leq |x| \leq R} \frac{x^\alpha}{|x|^{N+1}} \left(\int_0^1 (1-t) \partial^\alpha \varphi(tx) dt \right) dx. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} A_\varepsilon &= \varphi(0) \int_{S^{N-1}} \left(\int_\varepsilon^R \frac{r^{N-1}}{r^{N+1}} dr \right) d\omega = \varphi(0) \omega_N \left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{R} \right), \\ B_\varepsilon &= \nabla \varphi(0) \cdot \int_{S^{N-1}} \left(\int_\varepsilon^R \frac{r\omega}{r^{N+1}} r^{N-1} dr \right) d\omega \\ &= (\ln R - \ln \varepsilon) \nabla \varphi(0) \cdot \int_{S^{N-1}} \omega d\omega = 0. \end{aligned}$$

En effet sur S^{N-1} , la normale unitaire extérieure ν coïncide avec le rayon vecteur ω et la formule d'intégration par parties

$$\int_{B(0,1)} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx = \int_{S^{N-1}} f \nu_i dS(x),$$

permet d'écrire

$$\int_{S^{N-1}} \omega_i d\omega = \int_{S^{N-1}} \nu_i dS(\omega) = \int_{|x|<1} \frac{\partial 1}{\partial x_i} dx = 0.$$

Maintenant pour $|\alpha| = 2$, $|x^\alpha| \leq |x|^2$, alors

$$\begin{aligned} & \int_{|x| \leq R} \left| \frac{x^\alpha}{|x|^{N+1}} \int_0^1 (1-t) \partial^\alpha \varphi(tx) dt \right| dx \\ & \leq \|\partial^\alpha \varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \left(\int_{|x| \leq R} \frac{1}{|x|^{N-1}} dx \right) \int_0^1 (1-t) dt \\ & \leq \frac{1}{2} \|\partial^\alpha \varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \left(\int_{|x| \leq R} \frac{1}{|x|^{N-1}} dx \right) < \infty. \end{aligned}$$

Par conséquent $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} C_\varepsilon$ existe et est finie et de plus

$$C = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} C_\varepsilon = 2 \sum_{|\alpha|=2} \frac{1}{\alpha!} \int_{|x| \leq R} \frac{x^\alpha}{|x|^{N+1}} \int_0^1 (1-t) \partial^\alpha \varphi(tx) dt dx.$$

En passant aux coordonnées polaires, on trouve $\int_{|x| \leq R} \frac{1}{|x|^{N-1}} dx = \omega_N R$, ce qui conduit à la majoration suivante

$$|C| \leq \omega_N R \sum_{|\alpha|=2} \frac{\|\partial^\alpha \varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}}{\alpha!}.$$

Ainsi

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{\varepsilon \leq |x| \leq R} \frac{\varphi(x)}{|x|^{N-1}} dx - \omega_N \frac{\varphi(0)}{\varepsilon} \right) = C - \omega_N \frac{\varphi(0)}{R},$$

donc $Pf \frac{1}{|x|^{N-1}}$ est bien définie sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. Elle est clairement linéaire et d'après ce qui précède, pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ avec $\text{Supp } \varphi \subset \overline{B(0, R)}$, on a

$$\begin{aligned} \left| \left\langle Pf \frac{1}{|x|^{N-1}}, \varphi \right\rangle \right| &\leq \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \frac{\omega_N}{R} + \omega_N R \sum_{|\alpha|=2} \frac{\|\partial^\alpha \varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}}{\alpha!} \\ &\leq C_R \sum_{|\alpha| \leq 2} \|\partial^\alpha \varphi\|_{L^\infty}, \end{aligned}$$

où $C_R = \omega_N \max(R, \frac{1}{R})$, donc $Pf \frac{1}{|x|^{N-1}}$ est une distribution sur $\mathbb{R}^N$ d'ordre inférieur ou égal à 2.

b) Considérons le cas $N = 1$.

▷ Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, rappelons que

$$\left\langle Pf \frac{H}{x}, \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_{x \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \varphi(0) \ln \varepsilon \right],$$

et

$$\begin{aligned} \left\langle Pf \frac{1}{|x|}, \varphi \right\rangle &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{|x|} dx + 2\varphi(0) \ln \varepsilon \right] \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{-x} dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx + 2\varphi(0) \ln \varepsilon \right] \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(-y)}{y} dy + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx + 2\varphi(0) \ln \varepsilon \right]. \end{aligned}$$

Comme

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(-y)}{y} dy + \varphi(0) \ln \varepsilon \right] = \left\langle Pf \frac{H}{x}, \overset{\vee}{\varphi} \right\rangle = \left\langle Pf \frac{H}{x}, \varphi \right\rangle,$$

on déduit que

$$\left\langle Pf \frac{1}{|x|}, \varphi \right\rangle = \left\langle Pf \frac{H}{x} + Pf \frac{H}{x}, \varphi \right\rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

▷ Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a

$$\left\langle Pf \frac{H}{x^2}, \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_{x \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx - \frac{\varphi(0)}{\varepsilon} + \varphi'(0) \ln \varepsilon \right],$$

donc

$$\left\langle Pf \frac{H}{x^2}, \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_{x \geq \varepsilon} \frac{\psi(x)}{x^2} dx - \frac{\psi(0)}{\varepsilon} + \psi'(0) \ln \varepsilon \right],$$

où $\psi(x) = \overset{\vee}{\varphi}(x) = \varphi(-x)$. Comme $\psi'(x) = -\varphi'(-x)$ alors

$$\left\langle Pf \frac{H}{x^2}, \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_{x \geq \varepsilon} \frac{\varphi(-x)}{x^2} dx - \frac{\varphi(0)}{\varepsilon} - \varphi'(0) \ln \varepsilon \right].$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \langle Pf \frac{H}{x^2} + Pf \overset{\vee}{\frac{H}{x^2}}, \varphi \rangle &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_{x \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx + \int_{x \geq \varepsilon} \frac{\varphi(-x)}{x^2} dx - 2 \frac{\varphi(0)}{\varepsilon} \right] \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx - 2 \frac{\varphi(0)}{\varepsilon} \right] = \langle Pf \frac{1}{|x|^2}, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

En conclusion, on a

$$Pf \frac{1}{|x|} = Pf \frac{H}{x} + Pf \overset{\vee}{\frac{H}{x}}, \quad Pf \frac{1}{|x|^2} = Pf \frac{H}{x^2} + Pf \overset{\vee}{\frac{H}{x^2}}.$$

Solution 2.20. Soit $K = \overline{\omega}$, K est un compact contenu dans Ω , donc il existe $C_K > 0$ et $m_K \in \mathbb{N}$ tels que

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C_K \sum_{|\alpha| \leq m_K} \|\partial^\alpha \varphi\|_{L^\infty(K)}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega).$$

Notons $S = T|_\omega$, comme $\mathcal{D}(\omega) \subset \mathcal{D}_K(\Omega)$ alors pour $\varphi \in \mathcal{D}(\omega)$, on a

$$|\langle S, \varphi \rangle| = |\langle T, \varphi \rangle| \leq C_K \sum_{|\alpha| \leq m_K} \|\partial^\alpha \varphi\|_{L^\infty(\omega)},$$

ce qui signifie que S est une distribution d'ordre inférieur ou égal à m_K sur ω .

Solution 2.21. Nous allons montrer que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{T(x+h) - T(x)}{h} = T' \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on écrit

$$\left\langle \frac{T(x+h) - T(x)}{h}, \varphi \right\rangle = \langle T, \psi_h \rangle,$$

où $\psi_h(x) = \frac{\varphi(x-h) - \varphi(x)}{h}$. Montrons que $\psi_h \xrightarrow{h \rightarrow 0} -\varphi'$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Soit $a > 0$ tel que $\text{Supp } \varphi \subset [-a, a]$. Alors $\text{Supp } \psi_h \subset \text{Supp } \varphi(-h) \cup \text{Supp } \varphi \subset [h-a, h+a] \cup [-a, a]$ alors

$$\text{Supp } \psi_h \subset [-a-1, a+1], \quad \forall h \in]-1, 1[.$$

Montrons maintenant que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\psi_h^{(k)} \xrightarrow{h \rightarrow 0} -(\varphi')^{(k)} = -\varphi^{(k+1)},$$

uniformément sur $\mathbb{R}$. Soit $k \in \mathbb{N}$, $x, h \in \mathbb{R}$ et soit $g(t) = \varphi^{(k)}(x - th)$ pour $t \in \mathbb{R}$. On a

$$\varphi^{(k)}(x-h) - \varphi^{(k)}(x) = g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(t) dt = -h \int_0^1 \varphi^{(k+1)}(x - th) dt,$$

donc

$$\begin{aligned}\psi_h^{(k)}(x) + \varphi^{(k+1)}(x) &= - \int_0^1 \varphi^{(k+1)}(x - th) dt + \varphi^{(k+1)}(x) \\ &= \int_0^1 (\varphi^{(k+1)}(x) - \varphi^{(k+1)}(x - th)) dt.\end{aligned}$$

En utilisant le théorème des accroissements finis, on obtient pour $x, h \in \mathbb{R}$

$$\left| \psi_h^{(k)}(x) + \varphi^{(k+1)}(x) \right| \leq |h| \|\varphi^{(k+2)}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \int_0^1 t dt = \frac{|h|}{2} \|\varphi^{(k+2)}\|_{L^\infty(\mathbb{R})},$$

d'où le résultat. Ainsi $\psi_h \xrightarrow{h \rightarrow 0} -\varphi'$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ et comme T est continue sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, alors

$$\lim_{h \rightarrow 0} \langle T, \psi_h \rangle = \langle T, -\varphi' \rangle = \langle T', \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Solution 2.22. Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

1) Calculons $f\delta$ et $f\delta'$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\langle f\delta, \varphi \rangle = \langle \delta, f\varphi \rangle = f(0) \varphi(0) = f(0) \langle \delta, \varphi \rangle,$$

d'où

$$f\delta = f(0) \delta.$$

De même pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}\langle f\delta', \varphi \rangle &= \langle \delta', f\varphi \rangle = -\langle \delta, (f\varphi)' \rangle = -(f\varphi)'(0) \\ &= -(f'\varphi + f\varphi')(0) = -f'(0) \langle \delta, \varphi \rangle + f(0) \langle \delta', \varphi \rangle.\end{aligned}$$

Par conséquent

$$f\delta' = -f'(0) \delta + f(0) \delta' \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

On peut aussi écrire, en utilisant ce qui précède

$$f\delta' = (f\delta)' - f'\delta = (f(0)\delta)' - f'(0)\delta,$$

et retrouver le résultat.

2) Calculons $f\delta^{(k)}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, en utilisant la formule de Leibnitz, on écrit

$$\begin{aligned}\langle f\delta^{(k)}, \varphi \rangle &= (-1)^k \langle \delta, (f\varphi)^{(k)} \rangle = (-1)^k \sum_{i=0}^k C_k^i f^{(k-i)}(0) \varphi^{(i)}(0) \\ &= (-1)^k \sum_{i=0}^k C_k^i f^{(k-i)}(0) \langle \delta, \varphi^{(i)} \rangle \\ &= \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} C_k^i f^{(k-i)}(0) \langle \delta^{(i)}, \varphi \rangle,\end{aligned}$$

donc

$$f\delta^{(k)} = \sum_{i=0}^k C_{k_i}\delta^{(i)} \quad \text{où } C_{k_i} = (-1)^{k-i} C_k^i f^{(k-i)}(0), \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Solution 2.23. 1) $(\sin x) 1_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \sin x$ p. p. sur $\mathbb{R}$ et définit donc une distribution sur $\mathbb{R}$ dont la dérivée (au sens classique et donc au sens des distributions) est $\cos x$. Ainsi

$$\left((\sin x) 1_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} \right)' = \cos x \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

▷ La fonction $\operatorname{sgn}(x)$ est définie par $\operatorname{sgn}(x) = 1$ si $x > 0$ et $\operatorname{sgn}(x) = -1$ si $x < 0$. Elle est bornée sur $\mathbb{R}$ donc elle définit une distribution sur $\mathbb{R}$. Comme elle est $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, avec une discontinuité en 0 de première espèce, on peut la dériver en appliquant la formule des sauts. La fonction étant constante par morceaux, on a (au sens des fonctions)

$$\left(\operatorname{sgn}(x) \right)' = 0, \quad \text{sur } \mathbb{R}^*,$$

avec le saut en 0 qui vaut $1 - (-1) = 2$, on obtient

$$\left(\operatorname{sgn}(x) \right)' = 2\delta \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

▷ La fonction $|x| = x \operatorname{sgn}(x)$ définit une distribution sur $\mathbb{R}$ et on a

$$|x|' = \left(x \operatorname{sgn}(x) \right)' = \operatorname{sgn}(x) + x \left(\operatorname{sgn}(x) \right)' = \operatorname{sgn}(x) + 2x\delta = \operatorname{sgn}(x) \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R})$$

car $x\delta = 0\delta = 0$. On peut aussi appliquer la formule des sauts directement pour calculer la dérivée de $|x|$. En notant que la fonction est dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^*) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R})$, sa dérivée au sens des distributions coïncide avec sa dérivée au sens des fonctions.

▷ La fonction $f(x) = \operatorname{sgn}(x)e^{-|x|}$ est définie par $f(x) = e^{-x}$ si $x > 0$ et $f(x) = -e^x$ si $x < 0$. Elle est bornée sur $\mathbb{R}$ ($|f(x)| \leq 1, \quad x \in \mathbb{R}^*$) donc elle définit une distribution sur $\mathbb{R}$. Comme elle est $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, avec une discontinuité en 0 de première espèce, on peut la dériver en appliquant la formule des sauts. Sa dérivée au sens des fonctions est donnée par $f'(x) = -e^{-x}$ si $x > 0$ et $f'(x) = -e^x$ si $x < 0$ c'est-à-dire $f' = -e^{-|x|}$, on obtient au sens des distributions

$$f' = -e^{-|x|} + [f]_{(0)}\delta = -e^{-|x|} + 2\delta,$$

car $[f]_{(0)} = 1 - (-1) = 2$.

▷ Soit $f(x) = \ln|x|$. La fonction f est localement intégrable sur $\mathbb{R}$ donc elle définit une distribution sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \ln|x| \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\langle f', \varphi \rangle = -\langle f, \varphi' \rangle = -\int_{\mathbb{R}} \ln |x| \varphi'(x) dx = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x| \geq \varepsilon} \ln |x| \varphi'(x) dx.$$

En intégrant par parties, on obtient pour $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \ln x \varphi'(x) dx &= -\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx - \varphi(\varepsilon) \ln \varepsilon, \\ \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \ln(-x) \varphi'(x) dx &= -\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \varphi(-\varepsilon) \ln \varepsilon, \end{aligned}$$

donc

$$-\int_{|x| \geq \varepsilon} \ln |x| \varphi'(x) dx = \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \ln \varepsilon (\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon)).$$

On sait que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \langle Vp \frac{1}{x}, \varphi \rangle,$$

et d'après le théorème des accroissements finis

$$(\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon)) \ln \varepsilon = 2\varepsilon \ln \varepsilon \varphi'(c_\varepsilon) \quad \text{où } c_\varepsilon \in]-\varepsilon, \varepsilon[,$$

et comme $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \ln \varepsilon = 0$ et $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi'(c_\varepsilon) = \varphi'(0)$, alors

$$\langle f', \varphi \rangle = \langle Vp \frac{1}{x}, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),$$

ce qui signifie que

$$(\ln |x|)' = Vp \frac{1}{x} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

▷ Soit la fonction $g(x) = H(x) \ln |x|$. $g \in L_{loc}^1(\mathbb{R})$, elle définit une distribution sur $\mathbb{R}$. Calculons sa dérivée au sens des distributions. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \langle g', \varphi \rangle &= -\langle g, \varphi' \rangle = -\int_0^{+\infty} \ln |x| \varphi'(x) dx \\ &= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{x \geq \varepsilon} \ln x \varphi'(x) dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \varphi(\varepsilon) \ln \varepsilon \right). \end{aligned}$$

Or

$$\ln \varepsilon \varphi(\varepsilon) = \ln \varepsilon (\varphi(0) + \varepsilon \varphi'(0) + o(\varepsilon)),$$

d'où

$$\langle g', \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \ln \varepsilon \varphi(0) \right] + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon \ln \varepsilon (\varphi'(0) + o(1)).$$

La première limite est finie et la deuxième est nulle, on obtient donc

$$\langle g', \varphi \rangle = \langle Pf \frac{H}{x}, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),$$

d'où

$$(H(x) \ln |x|)' = Pf \frac{H}{x} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

▷ Soit $T = Vp \frac{1}{x}$, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a

$$\langle T', \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi'(x)}{x} dx.$$

Après une intégration par parties, on obtient

$$\langle T', \varphi \rangle = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx - \frac{1}{\varepsilon} (\varphi(\varepsilon) + \varphi(-\varepsilon)) \right).$$

Comme

$$\varphi(\varepsilon) = \varphi(0) + \varepsilon \varphi'(0) + o(\varepsilon),$$

$$\varphi(-\varepsilon) = \varphi(0) - \varepsilon \varphi'(0) + o(\varepsilon),$$

alors

$$\langle T', \varphi \rangle = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx - 2 \frac{\varphi(0)}{\varepsilon} \right) = -\langle Pf \frac{1}{x^2}, \varphi \rangle,$$

d'où

$$(Vp \frac{1}{x})' = -Pf \frac{1}{x^2} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

▷ En procédant de la même manière, on montre que

$$\left(Pf \frac{1}{x^2} \right)' = -2 Pf \frac{1}{x^3}, \quad \left(Pf \frac{H}{x^2} \right)' = -2 Pf \frac{H}{x^3} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

▷ Considérons la fonction partie entière E définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad E(x) = k,$$

où k est l'unique entier relatif tel que $k \leq x < k+1$. La fonction E est $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, ses points de discontinuités $x_k = k, k \in \mathbb{Z}$ sont de première espèce. De plus, au sens des fonctions

$$E'(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}.$$

On calcule alors la dérivée de E au sens des distributions, en appliquant la formule des sauts, ce qui donne

$$E' = 0 + \sum_{k \in \mathbb{Z}} [E]_k \delta_k,$$

où pour $k \in \mathbb{Z}$, $[E]_k = \lim_{x \rightarrow k}^+ E(x) - \lim_{x \rightarrow k}^- E(x) = k - (k-1) = 1$. Ainsi

$$E' = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_k \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

▷ Considérons la fonction 2π -périodique définie par $f(x) = x$, $-\pi < x < \pi$.

f est bornée sur $\mathbb{R}$ donc elle définit une distribution sur $\mathbb{R}$. De plus f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux avec des discontinuités de première espèce aux points $(2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ et en ces points, le saut est donné par

$$[f]_{(2k+1)\pi} = -\pi - \pi = -2\pi, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

La dérivée de f au sens des fonctions est donnée par

$$f'(x) = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

En appliquant la formule des sauts, on obtient

$$f' = 1 - 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{(2k+1)\pi} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

2) Déterminons les dérivées successives de la distribution $T_n = \frac{x^n}{n!} H(x)$, $n \in \mathbb{N}$. Notons que $T_n = f_n H$ où $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}$. La fonction $f_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et sa dérivée est donnée par f_{n-1} , $n \geq 1$. Comme $T_0 = H$ alors $T'_0 = H' = \delta$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$T'_n = (f_n H)' = f'_n H + f_n H' = f_{n-1} H + f_n(0) \delta = T_{n-1},$$

car $f_n(0) = 0$ et $g\delta = g(0)\delta$ pour une fonction $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. De proche en proche, on obtient

$$T_n^{(k)} = \begin{cases} \frac{x^{n-k}}{(n-k)!} H(x) = T_{n-k} & \text{si } 0 \leq k \leq n, \\ \delta^{(k-n-1)} & \text{si } k \geq n+1. \end{cases}$$

Solution 2.24. 1) $f \in L^\infty(\mathbb{R}^2) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$, donc f définit une distribution sur $\mathbb{R}^2$. Calculons au sens des distributions, ses dérivées partielles d'ordre inférieur ou égal à 2. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \varphi \right\rangle &= -\left\langle f, \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\rangle = -\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) dx dy \\ &= -\iint_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) dx dy = -\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) dx \right) dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(0, y) dy = \int_{\Gamma} \varphi(x, y) dl, \end{aligned}$$

cette dernière intégrale étant une intégrale curviligne le long de la droite Γ de $\mathbb{R}^2$ définie par $\Gamma = \{(0, y), y \in \mathbb{R}\}$. Ainsi

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \delta_\Gamma \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2),$$

où δ_Γ est la distribution simple couche portée par Γ . De la même manière, on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2),$$

et par conséquent

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2).$$

Il reste à calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$. On a pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$

$$\left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \varphi \right\rangle = - \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\rangle = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(0, y) dy = - \int_\Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) dl.$$

Soit $\nu = (1, 0)$ la normale unitaire à Γ . Alors

$$\left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \varphi \right\rangle = - \int_\Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}(x, y) dl,$$

où $\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = \nabla \varphi \cdot \nu$ est la dérivée normale de φ , donc $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ est la distribution double couche $\frac{\partial}{\partial \nu}(\delta_\Gamma)$, on écrit

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial \nu}(\delta_\Gamma) \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2).$$

2ème méthode. On va appliquer la formule des sauts. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}^2$ et présente des discontinuités de première espèce sur $\Gamma = \partial\Omega$ où $\Omega = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ alors avec la notation T_g qui désigne la distribution associée à la fonction $g \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^2)$ et $\nu = (\nu_1, \nu_2) = (1, 0)$ qui désigne la normale unitaire sortante à Γ , on obtient

$$\frac{\partial T_f}{\partial x} = T_{\frac{\partial f}{\partial x}} + [f]_\Gamma \nu_1 \delta_\Gamma = \delta_\Gamma,$$

car au sens des fonctions, $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ p.p. dans $\mathbb{R}^2$ de sorte que $T_{\frac{\partial f}{\partial x}} = 0$. De même $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ p.p. dans $\mathbb{R}^2$ donc

$$\frac{\partial T_f}{\partial y} = T_{\frac{\partial f}{\partial y}} + [f]_\Gamma \nu_2 \delta_\Gamma = 0.$$

Ainsi

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \delta_\Gamma, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2).$$

Par définition

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial \nu}(\delta_\Gamma), \varphi \right\rangle = - \int_\Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}(x, y) dl, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2),$$

donc

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial \nu} (\delta_\Gamma), \varphi \right\rangle = - \int_\Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x} (x, y) dl = - \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial \varphi}{\partial x} (0, y) dy = - \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\rangle,$$

de sorte que

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial \nu} (\delta_\Gamma), \varphi \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \varphi \right\rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2),$$

donc

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial \nu} (\delta_\Gamma) \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2).$$

Remarque : (Voir Chapitre 3) On notera que $f = H \otimes 1$, c'est-à-dire $f(x, y) = H(x) \cdot 1(y)$. Par conséquent

$$\frac{\partial f}{\partial x} = H' \otimes 1 = \delta \otimes 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = H \otimes 1' = H \otimes 0 = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2).$$

On rappelle que pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$

$$\langle \delta \otimes 1, \varphi \rangle = \langle \delta_{(x)}, \langle 1(y), \varphi \rangle \rangle = \langle 1(y), \langle \delta_{(x)}, \varphi \rangle \rangle = \langle 1(y), \varphi(0, y) \rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi(0, y) dy.$$

2) Clairement T est bien définie sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$. Montrons que T définit une distribution sur $\mathbb{R}^2$.

Première méthode. Soit Δ la droite de $\mathbb{R}^2$ définie par $\Delta = \{(x, x), x \in \mathbb{R}\}$. Alors

$$\int_\Delta \varphi(x, y) dl = \int_{\mathbb{R}} \varphi(\gamma(x)) |\gamma'(x)| dx = \sqrt{2} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, x) dx,$$

où $\gamma(x) = (x, x), x \in \mathbb{R}$. Par conséquent

$$\langle T, \varphi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_\Delta \varphi(x, y) dl = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle \delta_\Delta, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2),$$

et donc

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} \delta_\Delta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2).$$

Deuxième méthode. T est linéaire sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$. Soit K un compact de $\mathbb{R}^2$ et soit $a > 0$ tel que $K \subset [-a, a]^2$ alors pour tout $\varphi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R}^2)$, on a

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq 2a \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}.$$

Par conséquent T est continue sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ et définit une distribution d'ordre 0 sur $\mathbb{R}^2$, c'est donc une mesure de Radon. Calculons maintenant la distribution $S = \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y}$.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$

$$\langle S, \varphi \rangle = \left\langle \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y}, \varphi \right\rangle = - \left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\rangle = - \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) (x, x) dx.$$

Posons $g(x) = \varphi(x, x)$, $x \in \mathbb{R}$ alors $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et

$$g'(x) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)(x, x).$$

Ainsi

$$\langle S, \varphi \rangle = - \int_{\mathbb{R}} g'(x) dx = -g(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = -\varphi(x, x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2),$$

et on conclut que

$$S = \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2).$$

Solution 2.25. $\triangleright$ Soit $T_n = n(\delta_{\frac{1}{n}} - \delta_{-\frac{1}{n}})$, $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a d'après le théorème des accroissements finis

$$\langle T_n, \varphi \rangle = n \left(\varphi\left(\frac{1}{n}\right) - \varphi\left(-\frac{1}{n}\right) \right) = n \frac{2}{n} \varphi'(c_n)$$

où $c_n \in]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$. Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle T_n, \varphi \rangle = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2\varphi'(c_n) = 2\varphi'(0) = 2\langle \delta, \varphi' \rangle = -2\langle \delta', \varphi \rangle$$

et on conclut que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = -2\delta' \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

$\triangleright$ Soit $T_n = n(\delta - \delta_{\frac{1}{n}})'' = S_n''$, $n \in \mathbb{N}^*$ où $S_n = n(\delta - \delta_{\frac{1}{n}})$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\langle S_n, \varphi \rangle = n\langle \delta - \delta_{\frac{1}{n}}, \varphi \rangle = n \left(\varphi(0) - \varphi\left(\frac{1}{n}\right) \right) = n \left(-\frac{1}{n} \right) \varphi'(c_n)$$

où $c_n \in]0, \frac{1}{n}[$. Par conséquent

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle S_n, \varphi \rangle = -\varphi'(0) = -\langle \delta, \varphi' \rangle = \langle \delta', \varphi \rangle.$$

Ainsi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \delta' \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}),$$

ce qui entraîne que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n \right)'' = \delta^{(3)} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

$\triangleright$ Soit $T_n = n^2(\delta_{\frac{1}{n}} + \delta_{-\frac{1}{n}} - 2\delta)$, $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\langle T_n, \varphi \rangle = n^2 \left(\varphi\left(\frac{1}{n}\right) + \varphi\left(-\frac{1}{n}\right) - 2\varphi(0) \right) = \varphi''(0) + o(1),$$

car

$$\begin{aligned} \varphi\left(\frac{1}{n}\right) &= \varphi(0) + \frac{1}{n}\varphi'(0) + \frac{1}{2n^2}\varphi''(0) + o\left(\frac{1}{n^2}\right), \\ \varphi\left(-\frac{1}{n}\right) &= \varphi(0) - \frac{1}{n}\varphi'(0) + \frac{1}{2n^2}\varphi''(0) + o\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle T_n, \varphi \rangle = \varphi''(0) = \langle \delta, \varphi'' \rangle = \langle \delta'', \varphi \rangle,$$

et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = \delta'' \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

▷ Soit $T_n = n^3 \left(\delta_{\frac{1}{n}} - \delta_{-\frac{1}{n}} + \frac{2}{n} \delta' \right)$, $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\langle T_n, \varphi \rangle = n^3 \left(\varphi\left(\frac{1}{n}\right) - \varphi\left(-\frac{1}{n}\right) - \frac{2}{n} \varphi'(0) \right).$$

On écrit

$$\begin{aligned} \varphi\left(\frac{1}{n}\right) &= \varphi(0) + \frac{1}{n} \varphi'(0) + \frac{1}{2n^2} \varphi''(0) + \frac{1}{6n^3} \varphi^{(3)}(0) + o\left(\frac{1}{n^3}\right), \\ \varphi\left(-\frac{1}{n}\right) &= \varphi(0) - \frac{1}{n} \varphi'(0) + \frac{1}{2n^2} \varphi''(0) - \frac{1}{6n^3} \varphi^{(3)}(0) + o\left(\frac{1}{n^3}\right), \end{aligned}$$

donc

$$\langle T_n, \varphi \rangle = \frac{1}{3} \varphi^{(3)}(0) + o(1).$$

A la limite, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle T_n, \varphi \rangle = \frac{1}{3} \varphi^{(3)}(0) = -\frac{1}{3} \langle \delta^{(3)}, \varphi \rangle,$$

c'est-à-dire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = -\frac{1}{3} \delta^{(3)} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

Solution 2.26. Pour le calcul des primitives dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ des distributions données, nous aurons besoin du résultat suivant démontré dans l'exercice 2.4 : Soit $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\int_{\mathbb{R}} \varphi_0(x) dx = 1$. Alors pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, il existe une unique fonction $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que

$$\varphi = \lambda \varphi_0 + \psi', \quad \text{où } \lambda = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx = \langle 1, \varphi \rangle.$$

Avec cette décomposition si $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, on détermine une primitive T_0 de S en posant

$$\langle T_0, \varphi \rangle = -\langle S, \psi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Les primitives de S dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ sont alors données par

$$T = T_0 + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Appliquons ce qui précède aux différentes distributions données, en gardant les mêmes notations, pour éviter toute répétition.

▷ Soit $S = \delta$, pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ on a

$$\begin{aligned}\langle T_0, \varphi \rangle &= -\langle \delta, \psi \rangle = -\psi(0) = \int_0^{+\infty} \psi'(x) dx = \int_0^{+\infty} (\varphi - \lambda \varphi_0)(x) dx \\ &= \int_0^{+\infty} \varphi(x) dx - \lambda \int_0^{+\infty} \varphi_0(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} H(x) \varphi(x) dx - \lambda \int_{\mathbb{R}} H(x) \varphi_0(x) dx \\ &= \langle H, \varphi \rangle - \lambda \langle H, \varphi_0 \rangle = \langle H, \varphi \rangle - C_0 \langle 1, \varphi \rangle,\end{aligned}$$

où $C_0 = \langle H, \varphi_0 \rangle$. Par conséquent $T_0 = H - C_0$ et les primitives de δ sont $T = T_0 + cste$, c'est-à-dire $T = H + C$, $C \in \mathbb{R}$.

▷ Soit $S = H$, pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ on a

$$\begin{aligned}\langle T_0, \varphi \rangle &= -\langle S, \psi \rangle = -\langle H, \psi \rangle = -\int_0^{+\infty} \psi(x) dx = -x\psi(x) \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} x\psi'(x) dx \\ &= \int_0^{+\infty} x\psi'(x) dx = \int_0^{+\infty} x(\varphi - \lambda \varphi_0)(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} xH(x) \varphi(x) dx - \lambda \int_{\mathbb{R}} xH(x) \varphi_0(x) dx \\ &= \langle xH, \varphi \rangle - \lambda \langle xH, \varphi_0 \rangle = \langle xH, \varphi \rangle - C_0 \langle 1, \varphi \rangle,\end{aligned}$$

où $C_0 = \langle xH, \varphi_0 \rangle$, d'où $T_0 = xH - C_0$ et donc $T = xH + C$, $C \in \mathbb{R}$.

▷ Soit $S = xH$. On calcule ses primitives T comme précédemment et on trouve

$$T = \frac{x^2}{2}H + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

▷ Soit $S = Vp \frac{1}{x}$, pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ on a

$$\begin{aligned}\langle T_0, \varphi \rangle &= -\langle S, \psi \rangle = -\langle Vp \frac{1}{x}, \psi \rangle = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\psi(x)}{x} dx \\ &= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\ln x \psi(x) \Big|_{\varepsilon}^{+\infty} + \ln(-x) \psi(x) \Big|_{-\infty}^{-\varepsilon} - \int_{|x| \geq \varepsilon} \ln |x| \psi'(x) dx \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\ln \varepsilon (\psi(\varepsilon) - \psi(-\varepsilon)) + \int_{|x| \geq \varepsilon} \ln |x| (\varphi - \lambda \varphi_0)(x) dx \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(2\varepsilon \ln \varepsilon \psi'(c_\varepsilon) + \int_{|x| \geq \varepsilon} \ln |x| \varphi(x) dx - \lambda \int_{|x| \geq \varepsilon} \ln |x| \varphi_0(x) dx \right),\end{aligned}$$

où $-\varepsilon < c_\varepsilon < \varepsilon$. Par conséquent, en posant $C_0 = \int_{\mathbb{R}} \ln |x| \varphi_0(x) dx$, on voit que

$$\langle T_0, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \ln |x| \varphi(x) dx - \lambda C_0 = \langle \ln |x|, \varphi \rangle - C_0 \langle 1, \varphi \rangle.$$

Ainsi $T_0 = \ln |x| - C_0$ et donc $T = \ln |x| + C$, $C \in \mathbb{R}$.

Solution 2.27. 1) Soit $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\theta = 1$ sur un voisinage de 0. Montrons que toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ se décompose de manière unique sous la forme

$$\varphi = \varphi(0)\theta + x\psi, \quad (2.8)$$

où $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. On posera alors $\psi = L(\varphi)$. Notons que l'égalité (2.8) entraîne nécessairement que

$$\psi(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(0)\theta(x)}{x} \quad \text{si } x \neq 0.$$

De plus, comme au voisinage de 0, sauf en 0, on a $\psi(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}$ alors $\lim_{x \rightarrow 0} \psi(x) = \varphi'(0)$, donc ψ est définie par

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)\theta(x)}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ \varphi'(0) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Clairement pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^*)$ et au voisinage de 0

$$\psi(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} = \frac{x \int_0^1 \varphi'(tx) dt}{x} = \int_0^1 \varphi'(tx) dt,$$

donc ψ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0 avec

$$\psi^{(k)}(x) = \int_0^1 t^k \varphi^{(k+1)}(tx) dt, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (2.9)$$

De plus $\text{Supp } \psi \subset \text{Supp } \varphi \cup \text{Supp } \theta$, on conclut que $\text{Supp } \psi$ est borné et donc $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

2) Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ solution de l'équation $xT = 0$, on utilise la décomposition (2.8) pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et on écrit

$$\begin{aligned} \langle T, \varphi \rangle &= \langle T, \varphi(0)\theta + x\psi \rangle = \varphi(0) \langle T, \theta \rangle + \langle T, x\psi \rangle \\ &= \varphi(0) \langle T, \theta \rangle + \langle xT, \psi \rangle = C\varphi(0) = C \langle \delta, \varphi \rangle, \end{aligned}$$

où la constante C est donnée par $C = \langle T, \theta \rangle$. Par conséquent $T = C\delta$. Réciproquement pour toute constante $C \in \mathbb{R}$, $C\delta$ vérifie l'équation $xT = 0$ donc les seules solutions de cette équation dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ sont

$$T = C\delta, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Soit $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, considérons l'équation $xT = S$. Si $T_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est une solution particulière de cette équation alors clairement pour tout $C \in \mathbb{R}$, $T_0 + C\delta$ est une solution de l'équation et réciproquement $x(T - T_0) = 0$ et de ce qui précède, on déduit que $T - T_0 = C$, $C \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire

$$T = T_0 + C\delta, \quad C \in \mathbb{R}.$$

3) Nous allons vérifier qu'une solution particulière T_0 de l'équation $xT = S$ est obtenue en posant pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\langle T_0, \varphi \rangle = \langle S, \psi \rangle,$$

où ψ est donnée par la décomposition (2.8). Comme l'application

$$L : \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

est linéaire alors $T_0 = S \circ L$ et T_0 est linéaire sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Vérifions la continuité de T_0 .

Soit K un compact de $\mathbb{R}$, on cherche $m_K \in \mathbb{N}$ et $C_K > 0$ tels que

$$|\langle T_0, \varphi \rangle| \leq C_K \sum_{k=0}^{m_K} \|\varphi^{(k)}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R}).$$

Soit $K' = K \cup \text{Supp } \theta$, S étant continue sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, il existe $m' \in \mathbb{N}$ et $C' > 0$ dépendant du compact K' donc de K tels que

$$|\langle S, \phi \rangle| \leq C' \sum_{l=1}^{m'} \|\phi^{(l)}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}_{K'}(\mathbb{R}).$$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R})$ alors $\psi = L(\varphi) \in \mathcal{D}_{K'}(\mathbb{R})$ donc

$$|\langle T_0, \varphi \rangle| = |\langle S, \psi \rangle| \leq C' \sum_{l=1}^{m'} \|\psi^{(l)}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}.$$

Nous allons estimer $\|\psi^{(l)}\|_{L^\infty}$ en fonction des normes L^∞ des dérivées de φ . Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on écrit

$$\begin{aligned} \varphi(x) - \varphi(0)\theta(x) &= \varphi(x) - \varphi(0) + \varphi(0)(\theta(0) - \theta(x)) \\ &= x \int_0^1 \varphi'(tx) dt - \varphi(0)x \int_0^1 \theta'(tx) dt. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\psi(x) = \int_0^1 \varphi'(tx) dt - \varphi(0) \int_0^1 \theta'(tx) dt,$$

et pour tout $l \in \mathbb{N}$

$$\psi^{(l)}(x) = \int_0^1 t^l \varphi^{(l+1)}(tx) dt - \varphi(0) \int_0^1 t^l \theta^{(l+1)}(tx) dt,$$

ce qui permet d'obtenir la majoration suivante

$$\|\psi^{(l)}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C_l (\|\varphi^{(l+1)}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + \|\theta^{(l+1)}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R})}),$$

où $C_l = \int_0^1 t^l dt = \frac{1}{l+1} \leq 1$, $l \in \mathbb{N}$. On conclut que

$$|\langle T_0, \varphi \rangle| \leq C_K \sum_{k=0}^{m'+1} \|\varphi^{(k)}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R}),$$

où $C_K = C' \max(1, \sum_{l=0}^{m'} \|\theta^{(l+1)}\|_{L^\infty(\mathbb{R})})$. Ainsi T_0 est continue sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ donc $T_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Montrons maintenant que $XT_0 = S$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\langle XT_0, \varphi \rangle = \langle T_0, x\varphi \rangle = \langle S, L(x\varphi) \rangle,$$

où $L(x\varphi)$ est l'unique fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ vérifiant l'égalité

$$x\varphi = (x\varphi)(0)\theta + xL(x\varphi) = xL(x\varphi).$$

Alors clairement $L(x\varphi) = \varphi$ et donc

$$\langle XT_0, \varphi \rangle = \langle S, \varphi \rangle,$$

d'où la conclusion.

4) Nous allons appliquer la méthode décrite précédemment pour résoudre l'équation $XT = S$ pour les différentes valeurs de S données.

▷ Soit $S = 1$. Les solutions de l'équation $XT = 1$ sont de la forme $T = T_0 + C\delta$, $C \in \mathbb{R}$ où T_0 est une solution particulière de l'équation que l'on calcule en posant pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\langle T_0, \varphi \rangle = \langle S, \psi \rangle = \langle 1, \psi \rangle,$$

où $\psi = L(\varphi)$ est l'unique fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ vérifiant $\varphi = \varphi(0)\theta + x\psi$ (voir (2.8)). On a donc

$$\begin{aligned} \langle T_0, \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}} \psi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)\theta(x)}{x} dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx - \varphi(0) \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\theta(x)}{x} dx \right) \\ &= \langle Vp \frac{1}{x}, \varphi \rangle - \varphi(0) \langle Vp \frac{1}{x}, \theta \rangle = \langle Vp \frac{1}{x}, \varphi \rangle - C_0 \langle \delta, \varphi \rangle, \end{aligned}$$

où $C_0 = \langle Vp \frac{1}{x}, \theta \rangle$. Par conséquent $T_0 = Vp \frac{1}{x} - C_0\delta$ et la solution générale de l'équation est

$$T = Vp \frac{1}{x} + C\delta, \quad C \in \mathbb{R}.$$

▷ Soit $S = \delta$. Avec les notations ci-dessus, on détermine une solution particulière T_0 de l'équation en posant pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\langle T_0, \varphi \rangle = \langle S, \psi \rangle = \langle \delta, \psi \rangle = \psi(0) = \varphi'(0) = -\langle \delta', \varphi \rangle.$$

Donc $T_0 = -\delta'$ et la solution générale de l'équation est donnée par

$$T = -\delta' + C\delta, \quad C \in \mathbb{R}.$$

▷ Pour résoudre l'équation $xT = \delta'$, on pose pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\langle T_0, \varphi \rangle = \langle \delta', \psi \rangle = -\langle \delta, \psi' \rangle = -\psi'(0).$$

Or (voir (2.9))

$$\psi'(0) = \int_0^1 t\varphi''(0)dt = \frac{1}{2}\varphi''(0),$$

donc $T_0 = -\frac{1}{2}\delta''$ et la solution générale de l'équation est

$$T = -\frac{1}{2}\delta'' + C\delta, \quad C \in \mathbb{R}.$$

▷ Pour résoudre l'équation $xT = Vp \frac{1}{x}$, on pose pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \langle T_0, \varphi \rangle &= \langle Vp \frac{1}{x}, \psi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\psi(x)}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)\theta(x)}{x^2} dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx - \varphi(0) \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\theta(x)}{x^2} dx \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx - 2\frac{\varphi(0)}{\varepsilon} + 2\frac{\varphi(0)}{\varepsilon} - \varphi(0) \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\theta(x)}{x^2} dx \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx - 2\frac{\varphi(0)}{\varepsilon} \right) - \varphi(0) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\theta(x)}{x^2} dx - 2\frac{\theta(0)}{\varepsilon} \right) \\ &= \langle Pf \frac{1}{x^2}, \varphi \rangle - \varphi(0) \langle Pf \frac{1}{x^2}, \theta \rangle = \langle Pf \frac{1}{x^2} - C_0\delta, \varphi \rangle, \end{aligned}$$

où $C_0 = \langle Pf \frac{1}{x^2}, \theta \rangle$. On déduit que $T_0 = Pf \frac{1}{x^2} - C_0\delta$ est une solution particulière, la solution générale étant donnée par

$$T = Pf \frac{1}{x^2} + C\delta, \quad C \in \mathbb{R}.$$

▷ De la même manière, on montre que la solution générale de l'équation $xT = Pf \frac{1}{x^2}$ est donnée par

$$T = Pf \frac{1}{x^3} + C\delta, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Remarque : Soit $f = xg$ où $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et ne s'annule nulle part sur $\mathbb{R}$ de sorte que la fonction $\frac{1}{g} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Alors l'équation $fT = S$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est équivalente à l'équation $xT = \frac{1}{g}S$.

Solution 2.28. Soit $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, on considère l'équation $x^n T = S$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, le cas $n = 1$ ayant été étudié dans l'exercice précédent.

1) Montrons que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \exists ! \psi = L(\varphi) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}); \quad \varphi = \theta \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} \varphi^{(k)}(0) + x^n \psi. \quad (2.10)$$

En utilisant la formule de Taylor, on écrit au voisinage de 0

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} \varphi^{(k)}(0) + \frac{x^n}{(n-1)!} \int_0^1 (1-t)^{n-1} \varphi^{(n)}(tx) dt,$$

donc ψ est nécessairement donnée par

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^n} \left(\varphi(x) - \theta(x) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} \varphi^{(k)}(0) \right) & \text{si } x \neq 0, \\ \frac{1}{(n-1)!} \int_0^1 (1-t)^{n-1} \varphi^{(n)}(0) dt = \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} & \text{sinon.} \end{cases}$$

On déduit facilement que $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et au voisinage de 0

$$\psi^{(k)}(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^1 (1-t)^{n-1} t^k \varphi^{(n+k)}(tx) dt, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

donc

$$\psi^{(k)}(0) = \frac{\varphi^{(n+k)}(0)}{(n-1)!} \int_0^1 (1-t)^{n-1} t^k dt = \frac{k!}{(n+k)!} \varphi^{(n+k)}(0), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

De plus, comme $\text{Supp } \psi \subset \text{Supp } \varphi \cup \text{Supp } \theta$, on conclut que $\text{Supp } \psi$ est borné et donc $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Remarque : On calcule les intégrales $I_k^n = \int_0^1 (1-t)^n t^k dt$, $k, n \in \mathbb{N}$ par récurrence sur n , de la manière suivante. On voit facilement que $I_k^0 = \frac{1}{k+1}$ pour $k \in \mathbb{N}$ et une intégration par parties montre que $I_k^n = \frac{n}{k+1} I_{k+1}^{n-1}$, $k \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Ainsi par récurrence, on obtient

$$I_k^n = \frac{n!k!}{(k+n)!} I_{k+n}^0 = \frac{n!k!}{(k+n+1)!}.$$

2) Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ une solution de l'équation $x^n T = 0$ alors pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a en utilisant la décomposition (2.10) de φ

$$\langle T, \varphi \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} \langle T, x^k \theta \rangle + \langle T, x^n \psi \rangle,$$

et comme $\langle T, x^n \psi \rangle = \langle x^n T, \psi \rangle = 0$, alors

$$\langle T, \varphi \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} \langle T, x^k \theta \rangle \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{\langle T, x^k \theta \rangle}{k!} \langle \delta^{(k)}, \varphi \rangle,$$

d'où

$$T = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \delta^{(k)} \quad \text{avec } \alpha_k = \frac{(-1)^k}{k!} \langle T, x^k \theta \rangle, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Réciproquement toute distribution de la forme $\sum_{k=0}^{n-1} C_k \delta^{(k)}$, $C_k \in \mathbb{R}$, est une solution de l'équation $x^n T = 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. On déduit comme dans l'exercice précédent que la solution générale de l'équation $x^n T = S$ est de la forme

$$T = T_0 + \sum_{k=0}^{n-1} C_k \delta^{(k)}, \quad C_k \in \mathbb{R},$$

T_0 étant une solution particulière.

3) Pour le calcul d'une solution particulière T_0 , on utilise la décomposition 2.10) et on pose pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\langle T_0, \varphi \rangle = \langle S, \psi \rangle$. On vérifie comme dans l'exercice précédent que T_0 est bien une distribution sur $\mathbb{R}$ qui vérifie l'équation $x^n T = S$.

4) $\triangleright$ Soit $S = \delta$, avec les notations précédentes, on pose pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\langle T_0, \varphi \rangle = \langle S, \psi \rangle = \psi(0) = \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-1)^n}{n!} \langle \delta^{(n)}, \varphi \rangle,$$

d'où $T_0 = \frac{(-1)^n}{n!} \delta^{(n)}$. La solution générale de l'équation $x^n T = \delta$ est donc

$$T = \frac{(-1)^n}{n!} \delta^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} C_k \delta^{(k)}, \quad C_k \in \mathbb{R}.$$

$\triangleright$ De même, on montre que la solution générale de l'équation $x^n T = 1$ est

$$T = Pf \frac{1}{x^n} + \sum_{k=0}^{n-1} C_k \delta^{(k)}, \quad C_k \in \mathbb{R}.$$

Solution 2.29. 1) Soit à résoudre dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, l'équation $(x-a)T = S$, $a \in \mathbb{R}^*$.

En s'inspirant de l'exercice 2.27, on voit que la solution générale est la somme d'une solution particulière T_0 et de la solution générale de l'équation homogène $(x-a)T = 0$. Pour résoudre cette dernière, on introduit une fonction $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\theta = 1$ sur un voisinage de a . On montre alors que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \exists! \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}); \quad \varphi = \varphi(a)\theta + (x-a)\psi. \quad (2.11)$$

ψ est nécessairement donnée par

$$\psi(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(a)\theta(x)}{x-a} \quad \text{si } x \neq a \quad \text{et} \quad \psi(a) = \varphi'(a), \quad (2.12)$$

et si $(x - a)T = 0$ alors

$$\langle T, \varphi \rangle = \varphi(a) \langle T, \theta \rangle + \langle (x - a)T, \psi \rangle = C_0 \langle \delta_a, \varphi \rangle,$$

où $C_0 = \langle T, \theta \rangle$, donc $T = C_0 \delta_a$. Réciproquement si $T = C \delta_a$, $C \in \mathbb{R}$ alors $(x - a)T = 0$. Ainsi la solution générale de l'équation homogène $(x - a)T = 0$ est

$$T = C \delta_a, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Ensuite on détermine une solution particulière T_0 de l'équation avec second membre S en posant :

$$\langle T_0, \varphi \rangle = \langle S, \psi \rangle,$$

où ψ est définie par (2.12).

▷ Soit $S = \delta_b$, la solution générale de l'équation $(x - a)T = \delta_b$ est de la forme $T = T_0 + C \delta_a$, $C \in \mathbb{R}$, T_0 étant une solution particulière de l'équation qu'on détermine en posant pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\langle T_0, \varphi \rangle = \langle \delta_b, \psi \rangle = \psi(b).$$

Nous distinguons deux cas :

◇ Si $b = a$ alors $\psi(b) = \varphi'(a)$ donc

$$\langle T_0, \varphi \rangle = -\langle \delta'_a, \varphi \rangle.$$

Par conséquent $T_0 = -\delta'_a$ et

$$T = -\delta'_a + C \delta_a, \quad C \in \mathbb{R}.$$

◇ Si $b \neq a$ alors $\psi(b) = \frac{\varphi(b) - \varphi(a)\theta(b)}{b - a}$ d'où

$$\langle T_0, \varphi \rangle = \frac{1}{b - a} \langle \delta_b, \varphi \rangle - C_0 \langle \delta_a, \varphi \rangle,$$

où $C_0 = \frac{1}{b - a} \langle \delta_a, \theta \rangle$. Par conséquent $T_0 = \frac{1}{b - a} \delta_b - C_0 \delta_a$ et

$$T = \frac{1}{b - a} \delta_b + C \delta_a, \quad C \in \mathbb{R}.$$

▷ Soit $S = \delta'_b$. Comme précédemment, on détermine une solution particulière de l'équation $(x - a)T = \delta'_b$ en posant pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\langle T_0, \varphi \rangle = \langle \delta'_b, \psi \rangle = -\psi'(b).$$

◇ Si $b = a$ alors $\psi'(a) = \frac{1}{2}\varphi''(a)$ donc

$$\langle T_0, \varphi \rangle = -\frac{1}{2} \langle \delta_a'', \varphi \rangle.$$

Par conséquent $T_0 = -\frac{1}{2}\delta_a''$ et

$$T = -\frac{1}{2}\delta_a'' + C\delta_a, \quad C \in \mathbb{R}.$$

◇ Si $b \neq a$, pour simplifier, on choisit dans la décomposition (2.11) $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\theta = 1$ sur un voisinage de a et $\theta = 0$ sur un voisinage de b . On a alors

$$\psi'(b) = \frac{\varphi'(b)}{b-a} - \frac{\varphi(b)}{(b-a)^2},$$

d'où

$$\langle T_0, \varphi \rangle = \frac{1}{b-a} \langle \delta_b', \varphi \rangle + \frac{1}{(b-a)^2} \langle \delta_b, \varphi \rangle.$$

Par conséquent $T_0 = \frac{1}{b-a}\delta_b' + \frac{1}{(b-a)^2}\delta_b$ et

$$T = \frac{1}{b-a}\delta_b' + \frac{1}{(b-a)^2}\delta_b + C\delta_a, \quad C \in \mathbb{R}.$$

2) Soit l'équation $(x-a)(x-b)T = S$. On distingue deux cas :

◇ Si $b = a$, l'équation devient $(x-a)^2T = S$. Pour la résoudre, on considère une fonction $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\theta = 1$ sur un voisinage de a et on utilise la décomposition suivante

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \exists! \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}); \quad \varphi = (\varphi(a) + \varphi'(a)(x-a))\theta + (x-a)^2\psi.$$

En s'inspirant des résultats de l'exercice 2.28, on montre que

▷ Si $S = 0$ alors la solution de l'équation est

$$T = C_1\delta_a + C_2\delta_a', \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

▷ Si $S = 1$, on obtient une solution particulière en posant pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\langle T_0, \varphi \rangle = \langle 1, \psi \rangle.$$

On peut aussi vérifier que $Pf \frac{1}{(x-a)^2}$ est solution et donc la solution générale de l'équation est

$$T = Pf \frac{1}{(x-a)^2} + C_1\delta_a + C_2\delta_a', \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

◇ Si $b \neq a$, on peut procéder de deux manières :

i) On pose $(x - a)T = T_1$ donc

$$(x - a)(x - b)T = S \iff \begin{cases} (x - b)T_1 = S \\ \text{et} \\ (x - a)T = T_1. \end{cases}$$

On résout d'abord l'équation $(x - b)T_1 = S$ puis l'équation $(x - a)T = T_1$. Ainsi pour $S = 0$, les calculs faits dans 1) montrent que $T_1 = C_1\delta_b$, $C_1 \in \mathbb{R}$ puis

$$T = C_1\delta_b + C_2\delta_a, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Pour $S = 1$, on obtient $T_1 = Vp \frac{1}{x - b} + C_1\delta_b$, $C_1 \in \mathbb{R}$ puis

$$T = \frac{1}{b - a} \left(Vp \frac{1}{x - b} - Vp \frac{1}{x - a} \right) + C_1\delta_b + C_2\delta_a, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

ii) On considère deux fonctions $\theta_1, \theta_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telles que $\theta_1 = 1$ sur un voisinage de a et $\theta_2 = 1$ sur un voisinage de b et pour simplifier on suppose que $\theta_1 = 0$ sur un voisinage de b et $\theta_2 = 0$ sur un voisinage de a . On montre alors que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \exists! \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}); \quad \varphi = \varphi(a)\theta_1 + \varphi(b)\theta_2 + (x - a)(x - b)\psi.$$

Noter qu'alors ψ est donnée par

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{\varphi(x) - \varphi(a)\theta_1(x) - \varphi(b)\theta_2(x)}{(x - a)(x - b)} & \text{si } x \neq a \text{ et } x \neq b, \\ \frac{1}{a - b} \varphi'(a) & \text{si } x = a, \\ \frac{1}{b - a} \varphi'(b) & \text{si } x = b. \end{cases}$$

On retrouve ainsi que la solution de l'équation homogène $(x - a)(x - b)T = 0$ est $T = C_1\delta_b + C_2\delta_a$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ et pour résoudre l'équation non homogène $(x - a)(x - b)T = S$, on détermine une solution particulière T_0 en posant pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\langle T_0, \varphi \rangle = \langle S, \psi \rangle.$$

Solution 2.30. ▷ Soit à résoudre l'équation $xT' = 1$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Cette équation est équivalente au système d'équations $xS = 1$ et $T' = S$. D'après l'exercice 2.27, $S = Vp \frac{1}{x} + C_1\delta$, $C_1 \in \mathbb{R}$ puis en utilisant l'exercice 2.26, on obtient

$$T = \ln|x| + C_1H + C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

▷ Soit à résoudre l'équation $x^2 T' = 0$. En utilisant l'exercice 2.28, on voit que $T' = C_1 \delta + C_2 \delta'$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Par conséquent

$$T = C_1 H + C_2 \delta + C_3, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

▷ L'équation $xT' + T = \delta$ est équivalente à $(xT)' = \delta$. Par conséquent $xT = H + C_1$, $C_1 \in \mathbb{R}$. On résout cette dernière équation en utilisant le principe de superposition des solutions. En notant que

$$x Pf \frac{H}{x} = H, \quad x Vp \frac{1}{x} = 1,$$

on déduit que

$$x \left(Pf \frac{H}{x} + C_1 Vp \frac{1}{x} \right) = H + C_1.$$

Par conséquent la solution générale de l'équation donnée est

$$T = Pf \frac{H}{x} + C_1 Vp \frac{1}{x} + C_2 \delta, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Solution 2.31. 1) $A \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $A' = aA$. Par conséquent, on a dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

$$(AT)' = A'T + AT' = aAT + A(b - aT) = Ab.$$

2) $Ab \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$. Soit $B(x) = \int_0^x A(t)b(t) dt$, $B \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et $B' = Ab$, de sorte que $(AT - B)' = 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Par conséquent, il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $AT - B = C$, c'est-à-dire

$$AT = B + C.$$

La fonction $A(x)$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ donc $\frac{1}{A} = \exp \left(- \int_0^x a(t) dt \right) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et

$$T = \frac{1}{A}(B + C) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}). \quad (2.13)$$

Par conséquent la dérivée de T au sens des distributions coïncide avec sa dérivée au sens classique et en dérivant l'expression obtenue dans (2.13), on voit que T vérifie l'edo au sens classique.

On conclut donc que les seules solutions de l'edo dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ sont ses solutions classiques.

Solution 2.32. 1) Comme $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$, alors $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^2)$ si et seulement si

$$\int_{B(0,1)} |f(x,y)| dx dy < \infty,$$

$B(0,1)$ étant la boule de centre l'origine et de rayon 1. Or

$$\int_{B(0,1)} |f(x,y)| dx dy = - \int_{B(0,1)} \ln |(x,y)| dx dy = - \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 r \ln r dr \right) d\theta = \frac{\pi}{2}.$$

On conclut que $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$, donc f définit une distribution sur $\mathbb{R}^2$ et on écrit

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \varphi(x, y) dx dy, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2).$$

2) $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\})$ et (au sens des fonctions)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \quad (x, y) \neq (0, 0).$$

On vérifie comme ci-dessus que les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont localement intégrables sur $\mathbb{R}^2$ et définissent donc des distributions sur $\mathbb{R}^2$. Nous allons montrer que les dérivées $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ au sens des distributions coïncident avec celles-ci. Pour éviter toute confusion, nous notons T_g la distribution associée à une fonction $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, en utilisant le théorème de Fubini

$$\left\langle \frac{\partial T_f}{\partial x}, \varphi \right\rangle = -\langle f, \frac{\partial \varphi}{\partial x} \rangle = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \ln(x^2 + y^2) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) dx \right) dy.$$

Pour $y \in \mathbb{R}^\star$ fixé, la fonction $x \mapsto \ln(x^2 + y^2)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc en intégrant par parties, on trouve

$$\int_{\mathbb{R}} \ln(x^2 + y^2) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) dx = -2 \int_{\mathbb{R}} \frac{x}{x^2 + y^2} \varphi(x, y) dx.$$

Par conséquent

$$\left\langle \frac{\partial T_f}{\partial x}, \varphi \right\rangle = - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{x}{x^2 + y^2} \varphi(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \varphi(x, y) dx dy,$$

de sorte que

$$\frac{\partial T_f}{\partial x} = T_{\frac{\partial f}{\partial x}}.$$

Comme x et y jouent le même rôle pour la fonction f , on a aussi

$$\frac{\partial T_f}{\partial y} = T_{\frac{\partial f}{\partial y}}.$$

Ainsi les dérivées au sens des distributions coïncident avec les dérivées au sens des fonctions.

Calculons maintenant Δf dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$

$$\begin{aligned} \langle \Delta f, \varphi \rangle &= \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \varphi \right\rangle + \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \varphi \right\rangle = -\left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) + \frac{y}{x^2 + y^2} \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) \right) dx dy. \end{aligned}$$

Nous utilisons les coordonnées polaires : Soit $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ et $\varphi(r \cos \theta, r \sin \theta) = \psi(r, \theta)$.
Notons que $\frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{\cos \theta}{r}$ et $\frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{\sin \theta}{r}$ de sorte que

$$\begin{aligned} \langle \Delta f, \varphi \rangle &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{+\infty} \left(\cos \theta \frac{\partial \varphi}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) + \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) \right) dr \right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{+\infty} \frac{\partial \psi}{\partial r}(r, \theta) dr \right) d\theta = \int_0^{2\pi} \psi(r, \theta) \Big|_0^{+\infty} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \varphi(r \cos \theta, r \sin \theta) \Big|_0^{+\infty} d\theta = -2\pi \varphi(0, 0) = -2\pi \langle \delta, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\Delta f = -2\pi \delta \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2).$$

Remarque : Soit $E = -\frac{1}{2\pi}f$, comme $\Delta E = \delta$, on dit que E est une solution fondamentale du laplacien dans $\mathbb{R}^2$.

Solution 2.33. 1) Soit $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ alors $g = \Phi^*(f) = f \circ \Phi^{-1} \in L^1_{loc}(\Omega')$. En effet si K' un compact de Ω' , on écrit

$$\begin{aligned} \int_{K'} |g(y)| dy &= \int_{\Phi^{-1}(K')} |f \circ \Phi^{-1}(\Phi(x))| |\det J_\Phi(x)| dx \\ &= \int_{\Phi^{-1}(K')} |f(x)| |\det J_\Phi(x)| dx. \end{aligned}$$

Comme $K = \Phi^{-1}(K')$ est un compact de Ω et $\det J_\Phi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ alors

$$\int_{K'} |g(y)| dy \leq \|\det J_\Phi\|_{L^\infty(K)} \int_K |f(x)| dx < \infty.$$

Ainsi $g = \Phi^*(f)$ définit une distribution sur Ω' et pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega')$

$$\langle \Phi^*(f), \varphi \rangle = \int_{\Omega'} f \circ \Phi^{-1}(y) \varphi(y) dy = \int_{\Omega} f(x) \varphi \circ \Phi(x) |\det J_\Phi(x)| dx.$$

Clairement la fonction $\varphi \circ \Phi \in \mathcal{D}(\Omega)$; la fonction $x \mapsto \det J_\Phi(x)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω , comme elle ne s'annule pas sur Ω , elle garde un signe constant sur chaque composante connexe de Ω et par suite la fonction $|\det J_\Phi(x)|$ est dans $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$. Ainsi $\varphi \circ \Phi(x) |\det J_\Phi(x)|$ est dans $\mathcal{D}(\Omega)$ donc

$$\langle \Phi^*(f), \varphi \rangle = \langle f, \varphi \circ \Phi |\det J_\Phi| \rangle = \langle |\det J_\Phi| f, \varphi \circ \Phi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega').$$

2) On généralise la formule précédente aux distributions quelconques et on définit $\Phi^*(T)$ pour $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ par :

$$\langle \Phi^*(T), \varphi \rangle = \langle |\det J_\Phi| T, \varphi \circ \Phi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega').$$

Le crochet de droite est bien défini puisque si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega')$ alors $\varphi \circ \Phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et comme $|\det J_\Phi(x)| \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ alors $|\det J_\Phi(x)|T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ donc la forme $\Phi^*(T)$ est bien définie sur $\mathcal{D}(\Omega')$ et de plus elle est linéaire. Montrons qu'elle est continue. Soit K' un compact de Ω' , comme $K = \Phi^{-1}(K')$ est un compact de Ω alors il existe $C_K > 0$ et $m_K \in \mathbb{N}$ tels que

$$|\langle |\det J_\Phi|T, \psi \rangle| \leq C_K \sum_{|\alpha| \leq m_K} \|\partial^\alpha \psi\|_{L^\infty(K)}, \quad \forall \psi \in \mathcal{D}_K(\Omega),$$

ce qui entraîne que

$$|\langle \Phi^*(T), \varphi \rangle| \leq C_K \sum_{|\alpha| \leq m_K} \|\partial^\alpha(\varphi \circ \Phi)\|_{L^\infty(K)}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_{K'}(\Omega').$$

Clairement $\|\varphi \circ \Phi\|_{L^\infty(K)} \leq \|\varphi\|_{L^\infty(K')}$ et comme pour $i = 1, 2, \dots, N$

$$\frac{\partial(\varphi \circ \Phi)}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^N \frac{\partial \varphi}{\partial y_j} \circ \Phi \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_i}$$

alors

$$\sum_{|\alpha|=1} \|\partial^\alpha(\varphi \circ \Phi)\|_{L^\infty(K)} \leq \|J_\Phi\|_{L^\infty(K)} \sum_{|\alpha|=1} \|\partial^\alpha \varphi\|_{L^\infty(K')},$$

et ainsi de suite, on peut montrer que

$$\sum_{|\alpha| \leq m_K} \|\partial^\alpha(\varphi \circ \Phi)\|_{L^\infty(K)} \leq C'_K \sum_{|\alpha| \leq m_K} \|\partial^\alpha \varphi\|_{L^\infty(K')}$$

où $C'_K > 0$ est une constante qui dépend de $\|\partial^\alpha \Phi_i\|_{L^\infty(K)}$, $|\alpha| \leq m_K$, $i = 1, 2, \dots, N$. On conclut que la forme $\Phi^*(T)$ définit bien une distribution sur Ω' .

3) On pose $\Omega =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $\Omega' = \mathbb{R}$ alors la fonction $\Phi_1 = \text{tg}$ réalise un $\mathcal{C}^\infty$ -difféomorphisme de Ω sur Ω' et

$$\langle \Phi_1^*(\delta), \varphi \rangle = \langle |\Phi_1'| \delta, \varphi \circ \Phi_1 \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega'),$$

c'est-à-dire

$$\langle \Phi_1^*(\delta), \varphi \rangle = \langle (1 + \text{tg}^2 x) \delta, \varphi(\text{tg } x) \rangle = \langle \delta, \varphi(\text{tg } x) \rangle = \varphi(\text{tg } 0) = \varphi(0), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Par conséquent $\Phi_1^*(\delta) = \delta$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

De même la fonction $\Phi_2 = e^x$ réalise un $\mathcal{C}^\infty$ -difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty[$ et

$$\langle \Phi_2^*(\delta), \varphi \rangle = \langle e^x \delta, \varphi(e^x) \rangle = \langle \delta, \varphi(e^x) \rangle = \varphi(1), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(]0, +\infty[),$$

de sorte que $\Phi_2^*(\delta) = \delta_1$ dans $\mathcal{D}'(]0, +\infty[)$.

CHAPITRE

3

CONVOLUTION DES DISTRIBUTIONS

Support d'une distribution, le produit tensoriel, la convolution, recherche d'inverse, résolution d'équations.

3.1 Rappel de cours

3.1.1 Support d'une distribution. Localisation et recollement de distributions

Définition 3.1 (Support d'une distribution). Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, le support de T noté $\text{Supp } T$ est le complémentaire dans Ω du plus grand ouvert ω_T sur lequel T est nulle, c'est-à-dire $\langle T, \varphi \rangle = 0$ pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}_{\omega_T}(\Omega)$. ω_T s'appelle l'ouvert d'annulation de T et $\text{Supp } T = \Omega \setminus \omega_T$.

Autrement dit $\text{Supp } T$ est le plus petit fermé F dans Ω tel que $\langle T, \varphi \rangle = 0$ pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\text{Supp } \varphi \cap F = \emptyset$.

L'existence du support est garantie par le résultat suivant

Proposition 3.1 (Principe de localisation). Soit $(\omega_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts de Ω et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Si $T|_{\omega_i} = 0$, $\forall i \in I$, alors $T|_{\bigcup_{i \in I} \omega_i} = 0$.

Exemples : 1) Si $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ alors $\text{Supp } T_f = \text{Supp } f$.

2) $\text{Supp } \delta_a = \{a\}$, $\text{Supp } H = [0, +\infty[$, $\text{Supp } Vp \frac{1}{x} = \mathbb{R}$.

Proposition 3.2 (Principe de recollement). Soit $(\omega_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts de $\mathbb{R}^N$ et $\Omega = \bigcup_{i \in I} \omega_i$ et soit $T_i \in \mathcal{D}'(\omega_i)$, $i \in I$ vérifiant la condition de compatibilité $T_i = T_j$ sur $\omega_i \cap \omega_j$, pour $i, j \in I$, c'est-à-dire

$$T_i|_{\omega_i \cap \omega_j} = T_j|_{\omega_i \cap \omega_j}, \quad \forall i, j \in I.$$

Alors il existe une unique distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ telle que $T|_{\omega_i} = T_i$, $\forall i \in I$.

3.1.2 Distributions à supports compacts

Proposition 3.3. Une distribution à support compact est d'ordre fini.

Notation : On note $\mathcal{E}(\Omega) = C^\infty(\Omega)$, muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de Ω , de la suite et de toutes ses dérivées. On note ensuite $\mathcal{E}'(\Omega)$ son dual.

Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ une distribution à support compact et $\theta \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\theta = 1$ sur un voisinage de $\text{Supp } T$. Pour φ dans $\mathcal{E}(\Omega)$, le crochet $\langle T, \theta\varphi \rangle$ est bien défini dans la dualité $\mathcal{D}' - \mathcal{D}$, on vérifie qu'il ne dépend pas du choix de θ , et on pose $\widetilde{T}$ la forme linéaire définie sur $\mathcal{E}(\Omega)$ par

$$\langle \widetilde{T}, \varphi \rangle = \langle T, \theta\varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{E}(\Omega).$$

Alors $\widetilde{T} \in \mathcal{E}'(\Omega)$ et l'application

$$T \in \{S \in \mathcal{D}'(\Omega); \text{Supp } S \text{ compact}\} \mapsto \widetilde{T} \in \mathcal{E}'(\Omega)$$

est bijective, ce qui permet d'identifier $\mathcal{E}'(\Omega)$ au sous-ensemble de $\mathcal{D}'(\Omega)$ formé des distributions à supports compacts.

Opérations : Nous avons les mêmes opérations que pour les distributions quelconques. Par exemple, si $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$, $f \in \mathcal{E}(\Omega)$, $\alpha \in \mathbb{N}^N$ alors fT , $\partial^\alpha T \in \mathcal{E}'(\Omega)$ et pour $\varphi \in \mathcal{E}(\Omega)$

$$\langle fT, \varphi \rangle = \langle T, f\varphi \rangle, \quad \langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle.$$

$\mathcal{E}'(\Omega)$ est muni de la topologie suivante

Définition 3.2 (Convergence dans $\mathcal{E}'(\Omega)$). Soit $(T_n)_n \subset \mathcal{E}'(\Omega)$, $(T_n)_n$ converge vers T dans $\mathcal{E}'(\Omega)$ si

i) Il existe un compact $K \subset \Omega$ tel que $\text{Supp } T_n \subset K$, $\forall n$,

ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle T_n, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle$, $\forall \varphi \in \mathcal{E}(\Omega)$.

On vérifie alors que l'inclusion $\mathcal{E}'(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ est topologique et dense.

3.1.3 Produit tensoriel de distributions

Soit Ω_i un ouvert de $\mathbb{R}^{N_i}$, $i = 1, 2$.

Définition 3.3 (Produit tensoriel de deux distributions). Soient $T_1 \in \mathcal{D}'(\Omega_1)$ et $T_2 \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$, le produit tensoriel de T_1 par T_2 est la distribution sur $\Omega_1 \times \Omega_2$ notée $T_1 \otimes T_2$ définie par

$$\langle T_1 \otimes T_2, \varphi \rangle = \langle T_1, \langle T_2, \varphi \rangle \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2).$$

On notera que l'ensemble des combinaisons linéaires des fonctions de la forme $\varphi_1 \otimes \varphi_2$ avec $\varphi_1 \in \mathcal{D}(\Omega_1)$ et $\varphi_2 \in \mathcal{D}(\Omega_2)$, est dense dans $\mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Rappelons que $\varphi_1 \otimes \varphi_2(x, y) = \varphi_1(x)\varphi_2(y)$ pour $(x, y) \in \Omega_1 \times \Omega_2$. On vérifie que $T_1 \otimes T_2$ est l'unique distribution sur $\Omega_1 \times \Omega_2$ vérifiant la propriété suivante

$$\langle T_1 \otimes T_2, \varphi_1 \otimes \varphi_2 \rangle = \langle T_1, \varphi_1 \rangle \langle T_2, \varphi_2 \rangle, \quad \forall \varphi_1 \in \mathcal{D}(\Omega_1), \varphi_2 \in \mathcal{D}(\Omega_2).$$

Par conséquent

$$\langle T_1 \otimes T_2, \varphi \rangle = \langle T_1, \langle T_2, \varphi \rangle \rangle = \langle T_2, \langle T_1, \varphi \rangle \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2).$$

Exemple : $\delta_a \otimes \delta_b = \delta_{(a,b)}, \quad \forall (a, b) \in \Omega_1 \times \Omega_2$.

Quelques propriétés

1. Si $f_i \in L^1_{loc}(\Omega_i)$, $i = 1, 2$ alors $T_{f_1} \otimes T_{f_2} = T_{f_1 \otimes f_2}$,
2. $\text{Supp}(T_1 \otimes T_2) = (\text{Supp } T_1) \times (\text{Supp } T_2)$, $T_i \in \mathcal{D}'(\Omega_i)$,
3. $\text{Ordre de } (T_1 \otimes T_2) \leq \text{ordre de } T_1 + \text{ordre de } T_2$, $T_i \in \mathcal{D}'(\Omega_i)$,
4. $\partial^{(\alpha, \beta)}(T_1 \otimes T_2) = (\partial^\alpha T_1) \otimes (\partial^\beta T_2)$, $T_i \in \mathcal{D}'(\Omega_i)$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^{N_1} \times \mathbb{N}^{N_2}$,
5. $(g_1 \otimes g_2)(T_1 \otimes T_2) = (g_1 T_1) \otimes (g_2 T_2)$, $T_i \in \mathcal{D}'(\Omega_i)$, $g_i \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_i)$,
6. $(T_1 \otimes T_2) \otimes T_3 = T_1 \otimes (T_2 \otimes T_3)$, $T_i \in \mathcal{D}'(\Omega_i)$ (associativité).

3.1.4 Convolution de distributions

Définition 3.4 (Fermés de $\mathbb{R}^N$ convolutifs). Soient F_1, F_2 deux fermés de $\mathbb{R}^N$, on dit qu'ils sont convolutifs si pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^N$, l'ensemble suivant est borné (et donc compact)

$$\{(x, y) \in F_1 \times F_2; x + y \in K\}.$$

On définit de la même manière k fermés convolutifs ($k \geq 2$).

Si $F_1, F_2, \dots, F_k$ sont des fermés convolutifs dans $\mathbb{R}^N$ alors leur somme $F_1 + F_2 + \dots + F_k$ est fermée. Si $F_1, F_2, \dots, F_k$ sont des fermés bornés sauf peut-être l'un d'entre eux, alors ils sont convolutifs. En dimension 1, si $F_1, F_2, \dots, F_k$ sont des fermés limités par la gauche (c'est-à-dire tous contenus dans $[a, +\infty[$, $a \in \mathbb{R}$), alors ils sont convolutifs. Même résultat s'ils sont limités par la droite.

Définition 3.5 (Convolution de deux distributions sur $\mathbb{R}^N$). Soient T_1, T_2 deux distributions sur $\mathbb{R}^N$ à supports convolutifs, leur convolution est la distribution sur $\mathbb{R}^N$ notée $T_1 * T_2$ définie par

$$\langle T_1 * T_2, \varphi \rangle = \langle T_1 \otimes T_2, \theta \varphi^\Delta \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N).$$

La fonction φ^Δ est définie par $\varphi^\Delta(x, y) = \varphi(x + y)$, $x, y \in \mathbb{R}^N$ et $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2N})$ est telle que $\theta = 1$ sur un voisinage de $K_\varphi = \text{Supp}(T_1 \otimes T_2) \cap \text{Supp} \varphi^\Delta$.

On vérifie que cette définition ne dépend pas du choix de la fonction θ qui joue néanmoins un rôle important puisque la fonction φ^Δ n'est pas à support compact mais comme $\text{Supp}(T_1 \otimes T_2) = (\text{Supp} T_1) \times (\text{Supp} T_2)$ et que ces deux supports sont convolutifs alors K_φ est compact.

Notation : On écrit $\langle T_1 * T_2, \varphi \rangle = \langle T_1 \otimes T_2, \varphi^\Delta \rangle$, étant sous-entendu que le crochet de droite s'exprime à l'aide de θ .

Dans le cas où l'une des distributions est à support compact, soit T_2 par exemple, alors on peut écrire, sans recourir à la fonction auxiliaire θ

$$\langle T_1 * T_2, \varphi \rangle = \langle T_1, \langle T_2, \varphi^\Delta \rangle \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N).$$

Noter que la convolution des distributions peut être définie dans un cadre plus général que celui des supports convolutifs mais on se restreint à celui-ci.

Exemple : On montre que si $f_1, f_2 \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ sont à supports convolutifs, alors $f_1 * f_2$ est bien définie sur $\mathbb{R}^N$, elle est localement intégrable et $T_{f_1} * T_{f_2} = T_{(f_1 * f_2)}$ (voir l'exercice 3.15).

Quelques propriétés

1) La convolution est une opération **commutative**, **bilinéaire**, elle est également **associative** si tous les supports sont convolutifs et

$$\text{Supp}(T_1 * T_2) \subset \text{Supp} T_1 + \text{Supp} T_2.$$

2) Les distributions de Dirac jouent un rôle particulier pour la convolution puisque pour tous $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$, $a \in \mathbb{R}^N$ et $\alpha \in \mathbb{N}^N$

$$T * \delta = T, \quad T * \delta_a = \tau_a T, \quad T * \partial^\alpha \delta = \partial^\alpha T.$$

Ceci permet de déduire que pour tous $T_1, T_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ à supports convolutifs, $a \in \mathbb{R}^N$ et $\alpha \in \mathbb{N}^N$

$$\tau_a(T_1 * T_2) = (\tau_a T_1) * T_2 = T_1 * (\tau_a T_2), \quad \partial^\alpha(T_1 * T_2) = (\partial^\alpha T_1) * T_2 = T_1 * (\partial^\alpha T_2).$$

3) Si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ et $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$ sont à supports convolutifs alors $T * f$ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ dont les valeurs sont données par

$$T * f(x) = \langle T, \tau_x^\vee f \rangle = \langle T(y), f(x - y) \rangle,$$

où $f^\vee(x) = f(-x)$. On vérifie alors la **formule de transposition** : Si $T_1 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ et $T_2 \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$ alors

$$\langle T_1 * T_2, \varphi \rangle = \langle T_1, T_2^\vee * \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N).$$

3.1.5 Algèbres de convolution

Définition 3.6 (Algèbre de convolution). Une algèbre de convolution est un espace vectoriel dans lequel $*$ est une loi interne, commutative et associative. Si de plus elle contient l'élément neutre δ , elle est dite unitaire.

Exemples : $L^1(\mathbb{R}^N)$ est une algèbre de convolution (non unitaire).

$\mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$ est une algèbre de convolution unitaire ainsi que l'ensemble $\mathcal{D}'_+$ défini par

$$\mathcal{D}'_+ = \{T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}); \text{Supp } T \subset [0, +\infty[\}.$$

Définition 3.7 (Inverses de convolution). Soient $S, T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$, on dit que S est un inverse de convolution de T si $T * S = \delta$.

Un inverse de convolution peut ne pas exister. En cas d'existence, il peut ne pas être unique, sauf si on se place dans une algèbre de convolution. De plus, si S_i est un inverse de T_i , $i = 1, 2$ alors $S_1 * S_2$ est un inverse de $T_1 * T_2$.

Calcul des inverses de convolution de $T = \sum_{k=1}^n a_k \delta^{(k)}$, $a_k \in \mathbb{R}$ et $a_n \neq 0$:

On considère l'équation différentielle linéaire homogène

$$T * y = \sum_{k=1}^n a_k y^{(k)} = 0.$$

Sa solution générale y_h est de la forme $y_h = \sum_{k=1}^n C_k y_k$ où les C_k sont des constantes arbitraires et les $y_k \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ forment un système fondamental de solutions. On détermine alors la solution particulière vérifiant les n conditions suivantes

$$y_p^{(k)}(0) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-2 \quad (\text{si } n \geq 2) \quad \text{et} \quad y_p^{(n-1)}(0) = \frac{1}{a_n}.$$

Hy_p est l'unique inverse de convolution de T dans $\mathcal{D}'_+$, alors que dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, il y a une infinité d'inverses donnés par $Hy_p + y_h = Hy_p + \sum_{k=1}^n C_k y_k$ où les C_k sont des constantes arbitraires.

3.2 Enoncé des exercices

Exercice 3.1. Soient $S, T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, ω un ouvert contenu dans Ω et $\alpha \in \mathbb{N}^N$. Montrer que :

1. $\text{Supp } T$ est le plus petit fermé F dans Ω tel que $\langle T, \varphi \rangle = 0$ pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\text{Supp } \varphi \cap F = \emptyset$.
2. $\text{Supp } (S + T) \subset \text{Supp } S \cup \text{Supp } T$ et $\text{Supp } (\partial^\alpha T) \subset \text{Supp } T$.
3. Si $fT = 0$, alors $\text{Supp } T \subset f^{-1}(\{0\})$. Montrer par un exemple que l'inclusion peut-être stricte.
4. Si $fT = 0$ et $f \in \mathcal{D}(\Omega)$, alors $\langle T, f \rangle = 0$ puis montrer par un contre-exemple que la réciproque est fausse.
5. $\{x \in \Omega; f(x) \neq 0\} \cap \text{Supp } T \subset \text{Supp } (fT) \subset \text{Supp } f \cap \text{Supp } T$.
6. $\text{Supp } (T|_\omega) = \text{Supp } T \cap \omega$.

Exercice 3.2. Trouver un exemple de suite de distributions $(T_n)_n \subset \mathcal{E}'$ telle que $(T_n)_n$ converge dans $\mathcal{D}'$ mais pas dans $\mathcal{E}'$.

Exercice 3.3. Soit $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$, on définit $\tilde{T}$ sur $\mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$ par

$$\langle \tilde{T}, \varphi \rangle = \langle T, \varphi|_\Omega \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^N).$$

Montrer que

1. $\tilde{T} \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$, $\tilde{T}|_\Omega = T$ et $\text{Supp } \tilde{T} = \text{Supp } T$ ($\tilde{T}$ s'appelle le prolongement de T par 0).
2. L'application $T \mapsto \tilde{T}$ est linéaire et continue de $\mathcal{E}'(\Omega)$ dans $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$.
3. $\partial^\alpha \tilde{T} = \widetilde{\partial^\alpha T}$, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^N$.

Exercice 3.4. Le support singulier d'une distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ noté $\text{Supp sing } T$ est le complémentaire du plus grand ouvert sur lequel T est une fonction $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$, ou encore c'est le plus petit fermé en dehors duquel T est une fonction $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$. Montrer que $\text{Supp sing } T \subset \text{Supp } T$ puis déterminer les supports singuliers des distributions $\ln|x|$, δ , H , $Vp \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3.5. Soient $a_0, a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{k=0}^m a_k \delta^{(k)} = 0$. Montrer que

$$a_0 = a_1 = \dots = a_m = 0.$$

Exercice 3.6. En utilisant les principes de localisation et de recollement des distributions, résoudre dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ l'équation

$$(1 - e^{ix}) T = 0.$$

Exercice 3.7. Déterminer les supports des distributions suivantes

$$\langle T_1, \varphi \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} \varphi(n), \quad \langle T_2, \varphi \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} e^{-n} \varphi\left(\frac{1}{n}\right), \quad \langle T_3, \varphi \rangle = \int_0^1 \ln x \varphi(x) dx,$$

$$\langle T_4, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x^2) dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),$$

$$\langle T_5, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, \lambda x) dx \quad (\lambda \in \mathbb{R}), \quad \langle T_6, \varphi \rangle = \int_0^{2\pi} \varphi(\cos \theta, \sin \theta) d\theta, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2).$$

Exercice 3.8. 1. Soit la fonction de Heaviside dans $\mathbb{R}^N$ définie par

$$H_N(x_1, \dots, x_N) = \underbrace{H \otimes \dots \otimes H}_{N \text{ fois}}(x_1, \dots, x_N).$$

Déterminer $H(x_1, \dots, x_N)$ pour $(x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ et vérifier que

$$\frac{\partial^N H_N}{\partial x_1 \dots \partial x_N} = \delta \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N).$$

2. Calculer $\partial^{\alpha_1} \delta_{a_1} \otimes \partial^{\alpha_2} \delta_{a_2} \otimes \dots \otimes \partial^{\alpha_N} \delta_{a_N}$, $a_i \in \mathbb{R}$, $\alpha_i \in \mathbb{N}$.

Exercice 3.9. Soient $S, T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$. Montrer que $\tau_{(a,b)}(S \otimes T) = (\tau_a S) \otimes (\tau_b T)$, $a, b \in \mathbb{R}^N$ puis déterminer $\Pi_\lambda(S \otimes T)$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Exercice 3.10. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, I un intervalle ouvert et soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, on note $(x, y) \in \Omega \times I$. Montrer que

$$\int_I \langle T(x), \varphi(x, y) \rangle dy = \langle T(x), \int_I \varphi(x, y) dy \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega \times I).$$

Exercice 3.11. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, I un intervalle ouvert, on note $(x, y) \in \Omega \times I$.

1. Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, montrer que $\frac{\partial(T \otimes 1)}{\partial y} = 0$ ($T \otimes 1$ est dite indépendante de la variable y).

2. Réciproquement soit $S \in \mathcal{D}'(\Omega \times I)$ telle que $\frac{\partial S}{\partial y} = 0$.

(a) Montrer que pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, il existe une unique constante $C(\varphi)$ telle que telle que $\langle S, \varphi \otimes \psi \rangle = C(\varphi) \int_I \psi(y) dy$, $\forall \psi \in \mathcal{D}(I)$.

Indication : Considérer la forme linéaire L_φ définie sur $\mathcal{D}(I)$ par

$$\langle L_\varphi, \psi \rangle = \langle S, \varphi \otimes \psi \rangle, \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(I).$$

(b) Montrer que l'application T définie par $\langle T, \varphi \rangle = C(\varphi)$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, est une distribution sur Ω et en déduire que $S = T \otimes 1$.

Exercice 3.12. Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, on pose $\langle T, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x, 0)}{x} dx$.
Montrer que T est une distribution sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3.13. Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, on pose

$$\langle T, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \iint_{|x| \geq \varepsilon, |y| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x, y)}{xy} dx dy.$$

Montrer que T définit une distribution sur $\mathbb{R}^2$ puis vérifier que $T = Vp \frac{1}{x} \otimes Vp \frac{1}{x}$.

(Indication : introduire $(\varphi(x, y) - \varphi(x, 0)) - (\varphi(0, y) - \varphi(0, 0))$ et écrire la formule de Taylor de chaque différence.)

Exercice 3.14. Résoudre dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ le système d'équations $xT = yT = 0$ puis l'équation $yS = 0$.

Exercice 3.15. Soient $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ ayant des supports convolutifs. Montrer que : $f * g$ est bien définie sur $\mathbb{R}^N$, $f * g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ et $T_f * T_g = T_{f*g}$.

Exercice 3.16. Soient S et T deux distributions sur $\mathbb{R}$, à supports convolutifs. Montrer que

$$\begin{aligned} x^n(S * T) &= \sum_{k=0}^n C_n^k (x^k S) * (x^{n-k} T), \quad n \in \mathbb{N}^*, \\ e^{\alpha x}(S * T) &= (e^{\alpha x} S) * (e^{\alpha x} T), \quad \alpha \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Exercice 3.17. 1. Soient $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ ayant leurs supports dans $[0, +\infty[$. Montrer que

$$f * g(x) = H(x) \int_0^x f(y)g(x-y) dy.$$

2. Calculer $f * H$ et $(f * H)'$ dans $\mathcal{D}'_+$. Que peut-on en conclure ?

3. Calculer la convolution de $f_1 H$ et $f_2 H$ pour $f_1, f_2 \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ puis appliquer au calcul de $e^{ax} H * e^{bx} H$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Exercice 3.18. Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}^*$, $\alpha > 0$, dans chacun des cas suivants, calculer la convolution, en justifiant son existence :

$$\begin{aligned} \delta_a * \delta_b, \quad \delta_a^{(m)} * T, \quad H * H, \quad \underbrace{H * H * \dots * H}_{n \text{ fois}}, \quad e^{-|x|} * e^{-|x|}, \\ e^{-\alpha x^2} * (x^2 e^{-\alpha x^2}), \quad (x^2 H) * (\sin x H), \quad (\cos x H) * (x^3 H), \quad (\sin x H) * (sh x H), \\ \delta'_a * Vp \frac{1}{x}, \quad H * Pf \frac{H}{x}, \quad (1_{[a,b]} * 1_{[c,d]})'', \quad \frac{1}{1+x^2} * \frac{x}{(1+x^2)^2}. \end{aligned}$$

Exercice 3.19. Déterminer dans $\mathcal{D}'_+$ et $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, les inverses de convolution des distributions suivantes :

$$H, \quad \delta', \quad \delta' - a\delta, \quad \delta'' + \lambda^2\delta, \quad \delta' - \lambda^2\delta, \quad (a, \lambda \in \mathbb{R}), \quad \delta'' - 3\delta' + 2\delta, \quad H + \delta''.$$

Exercice 3.20. 1. Soit $T = (\sin x)H$. Vérifier que T est la solution fondamentale dans $\mathcal{D}'_+$ d'un opérateur différentiel linéaire à coefficients constants et en déduire l'inverse de convolution de T dans $\mathcal{D}'_+$.

2. Déterminer les inverses de convolution dans $\mathcal{D}'_+$ des distributions $(\cos x)H$, $e^{-x}H$, $e^xH + \delta$.

Exercice 3.21. Résoudre dans $\mathcal{D}'_+$ puis dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ les équations différentielles suivantes :

$$T' - T = \delta, \quad T'' - 3T' + 2T = \delta' + \delta.$$

Exercice 3.22. Soit f la solution classique de l'équation différentielle $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = e^{2x}$ vérifiant les conditions $y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 2$. Ecrire l'équation différentielle satisfaite par la fonction $F = fH$ dans $\mathcal{D}'_+$ puis déterminer F en utilisant la convolution.

Exercice 3.23. Soit $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{D}'_+$, trouver $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{D}'_+$ vérifiant l'équation intégrale dans les cas suivants

$$\int_0^x (x-y)e^{x-y}f(y) dy = g(x), \quad \int_0^x \sin y f(x-y) dy = g(x),$$

$$f(x) + \int_0^x \sin y f(x-y) dy = g(x).$$

Exercice 3.24. Soit $D = \{(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}; t^2 - x^2 \geq 0\}$ et soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f = 1_D$. Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ et en déduire une solution fondamentale de l'opérateur $\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3.25. Soit P un polynôme de degré inférieur ou égal à $n \in \mathbb{N}$ et $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$. Montrer que $T * P$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à n .

Exercice 3.26. Soit $S = S^{N-1}$ la sphère unité de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, α une fonction intégrable sur S et f une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^N$. Que représente l'intégrale $\int_S \alpha(y)f(x-y) dS(y)$? Calculer $\delta_S * |x|^2$.

3.3 Solutions

Solution 3.1. 1) Par définition, $\text{Supp } T$ est le complémentaire dans Ω du plus grand ouvert ω_T sur lequel T est nulle, et $T = 0$ sur ω_T signifie

$$\langle T, \varphi \rangle = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\omega_T).$$

En posant $F = \Omega \setminus \omega_T$, on voit que $\text{Supp } T = F$ et F est le plus petit fermé de Ω en dehors duquel T est nulle. Comme l'inclusion $\text{Supp } \varphi \subset \omega_T$ est équivalente à $\text{Supp } \varphi \cap F = \emptyset$, on a donc

$$\langle T, \varphi \rangle = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega); \quad \text{Supp } \varphi \cap F = \emptyset.$$

Ainsi $\text{Supp } T$ est le plus petit fermé F dans Ω tel que $\langle T, \varphi \rangle = 0$ pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\text{Supp } \varphi \cap F = \emptyset$.

Dans la suite de cet exercice, nous noterons $\omega_U = \Omega \setminus \text{Supp } U$ l'ouvert d'annulation de la distribution U sur Ω .

2) $\triangleright$ En passant aux complémentaires, on voit que l'inclusion $\text{Supp}(S+T) \subset \text{Supp } T \cup \text{Supp } S$ est équivalente à l'inclusion $\omega_S \cap \omega_T \subset \omega_{S+T}$ qui est vraie. En effet l'ensemble $A = \omega_S \cap \omega_T \subset \Omega$ est un ouvert sur lequel S et T sont nulles car $A \subset \omega_S$ et $A \subset \omega_T$, donc $S+T$ est nulle sur A , d'où $A \subset \omega_{S+T}$.

$\triangleright$ Pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\omega_T)$, on a

$$\langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle = 0,$$

car $\text{Supp}(\partial^\alpha \varphi) \subset \text{Supp } \varphi \subset \omega_T$. Ainsi $\omega_T \subset \omega_{\partial^\alpha T}$, d'où $\text{Supp}(\partial^\alpha T) \subset \text{Supp } T$.

3) f étant continue sur Ω , l'ensemble $A = \{x \in \Omega; f(x) \neq 0\}$ est un ouvert de Ω . Supposons que $fT = 0$ et montrons que $A \subset \omega_T$.

Clairement $(fT)|_A = f|_A T|_A = 0$. On pose $g = \frac{1}{f|_A}$ alors $g \in \mathcal{C}^\infty(A)$ et $\forall \varphi \in \mathcal{D}(A)$

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T|_A, \varphi \rangle = \langle g f|_A T|_A, \varphi \rangle = \langle f|_A T|_A, g\varphi \rangle = 0,$$

car $g\varphi \in \mathcal{D}(A)$. Par conséquent $A \subset \omega_T$ et donc $\text{Supp } T \subset \Omega \setminus A = f^{-1}(\{0\})$.

Considérons la fonction $f = x(x - 1)$, $x \in \mathbb{R}$ et $T = \delta$, alors $fT = 0$ et on a $\text{Supp } T = \{0\}$ et $f^{-1}(\{0\}) = \{0, 1\}$. Donc l'inclusion $\text{Supp } T \subset f^{-1}(\{0\})$ est stricte dans ce cas.

4) Supposons $f \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $fT = 0$. Montrons que $\langle T, f \rangle = 0$.

Soit $\theta \in \mathcal{D}(\Omega)$ une fonction plateau subordonnée au compact $\text{Supp } f$ donc $\theta = 1$ sur un voisinage de $\text{Supp } f$ et $\theta f = f$ sur Ω . On écrit

$$\langle T, f \rangle = \langle T, \theta f \rangle = \langle fT, \theta \rangle = \langle 0, \theta \rangle = 0.$$

Considérons le cas où $T = \delta'$ et $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ est telle que $f = 1$ sur un voisinage de 0. On a

$$\langle T, f \rangle = -f'(0) = 0,$$

et comme $f = 1$ sur un voisinage de $\text{Supp } T$, alors

$$fT = T = \delta' \neq 0.$$

5) L'inclusion $\text{Supp}(fT) \subset \text{Supp } f \cap \text{Supp } T$ est équivalente à $\omega_f \cup \omega_T \subset \omega_{fT}$. Clairement $B = \omega_f \cup \omega_T$ est un ouvert et pour $\varphi \in \mathcal{D}(B)$, on a

$$\langle fT, \varphi \rangle = \langle T, f\varphi \rangle = 0,$$

car $f\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $\text{Supp}(f\varphi) \subset \text{Supp } f \cap \text{Supp } \varphi$ donc $\text{Supp}(f\varphi) \cap \text{Supp } T \subset \text{Supp } f \cap \text{Supp } \varphi \cap \text{Supp } T = B^c \cap \text{Supp } \varphi = \emptyset$. Par conséquent $B \subset \omega_{fT}$.

Soit maintenant $C = \{x \in \Omega; f(x) \neq 0\}$. C est un ouvert et $\overline{C} = \text{Supp } f$. Montrons que $C \cap \text{Supp } T \subset \text{Supp}(fT)$ ou de manière équivalente $\omega_{fT} \subset C^c \cup \omega_T$. On écrit

$$\omega_{fT} = \omega_{fT} \cap (C \cup C^c) = (\omega_{fT} \cap C) \cup (\omega_{fT} \cap C^c) \subset O \cup C^c,$$

où O est l'ouvert de Ω défini par $O = \omega_{fT} \cap C$. Montrons que $O \subset \omega_T$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(O)$, on écrit en posant $g = f|_O$

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T|_O, \varphi \rangle = \langle g \frac{1}{g} T, \varphi \rangle = \langle (fT)|_O, \frac{1}{g} \varphi \rangle = 0,$$

car $\frac{1}{g} \varphi \in \mathcal{D}(O)$ et $(fT)|_O = 0$ puisque $O \subset \omega_{fT}$. Ainsi on a bien $O \subset \omega_T$ et donc

$$\omega_{fT} \subset \omega_T \cup C^c.$$

6) Montrons que $\text{Supp}(T|_\omega) = \text{Supp } T \cap \omega$ où par définition

$$\langle T|_\omega, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\omega).$$

On pose $S = T|_{\omega}$ et

$$O = \omega \setminus (\text{Supp } T \cap \omega) = \omega \cap (\Omega \setminus \text{Supp } T).$$

O est un ouvert de ω et pour $\varphi \in \mathcal{D}(O)$

$$\langle S, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle = 0,$$

donc $O \subset \omega_S$, ω_S étant le plus grand ouvert contenu dans ω sur lequel S est nulle. Maintenant considérons un ouvert $\omega' \subset \omega$ tel que $S|_{\omega'} = 0$ et montrons que nécessairement $\omega' \subset O$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\omega')$

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle S, \varphi \rangle = \langle S|_{\omega'}, \varphi \rangle = 0,$$

donc T est nulle sur l'ouvert ω' . Par conséquent $\omega' \subset \Omega \setminus \text{Supp } T$. Ainsi

$$\omega' \subset \omega \cap (\Omega \setminus \text{Supp } T) = O,$$

et on conclut que $O = \omega_S$ ou encore $\text{Supp } S = \text{Supp } T \cap \omega$.

Solution 3.2. Soit $(T_n)_n$ la suite de distributions régulières définies par

$$T_n = 1_{[-n, n]}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

$\text{Supp } T_n = [-n, n]$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ donc $(T_n)_n \subset \mathcal{E}'(\mathbb{R})$. Calculons $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, comme φ est intégrable sur $\mathbb{R}$, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle T_n, \varphi \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx = \langle 1, \varphi \rangle,$$

donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = 1 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

Comme $1 \notin \mathcal{E}'(\mathbb{R})$, alors (T_n) ne converge pas dans $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$ car la convergence dans $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$ implique la convergence dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Noter aussi qu'il n'existe pas de compact $K \subset \mathbb{R}$ tel que $\text{Supp } T_n \subset K$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

De même la suite $(\delta_n)_{n \geq 0}$ converge vers 0 dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ mais elle ne converge pas dans $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$ car aucun compact de $\mathbb{R}$ ne contient $\mathbb{N}$.

Solution 3.3. 1) L'application $R : \varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^N) \mapsto \varphi|_{\Omega} \in \mathcal{E}(\Omega)$ est linéaire donc $\tilde{T} = T \circ R$ est linéaire sur $\mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$. Montrons que $\tilde{T}$ est continue sur $\mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$. Comme $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$, il existe un compact $K \subset \Omega$, une constante $C > 0$ et un entier naturel m tels que

$$|\langle T, \psi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha \psi\|_{L^\infty(K)}, \quad \forall \psi \in \mathcal{E}(\Omega).$$

Soit $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$ et soit $\psi = \varphi|_{\Omega}$, on a

$$|\langle \widetilde{T}, \varphi \rangle| = |\langle T, \psi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha \psi\|_{L^\infty(K)} \leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha \varphi\|_{L^\infty(K)},$$

car $\partial^\alpha \psi = \partial^\alpha \varphi$ sur Ω , d'où la continuité de $\widetilde{T}$. Ainsi $\widetilde{T} \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$ et de plus, on déduit de ce qui précède que $\text{Supp } \widetilde{T} \subset K \subset \Omega$.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ comme

$$\langle \widetilde{T}, \varphi \rangle = \langle T, \varphi|_{\Omega} \rangle = \langle T, \varphi \rangle,$$

alors $\widetilde{T}|_{\Omega} = T$. D'après l'exercice 3.1

$$\text{Supp } T = \text{Supp } (\widetilde{T}|_{\Omega}) = \text{Supp } \widetilde{T} \cap \Omega = \text{Supp } \widetilde{T},$$

car $\text{Supp } \widetilde{T} \subset \Omega$.

2) Soit l'application $P : T \in \mathcal{E}'(\Omega) \mapsto P(T) = \widetilde{T} \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$. Montrons que P est linéaire et continue.

Soient $S, T \in \mathcal{E}'(\Omega)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, pour $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$

$$\langle P(\lambda S + T), \varphi \rangle = \langle \lambda S + T, \varphi|_{\Omega} \rangle = \lambda \langle S, \varphi|_{\Omega} \rangle + \langle T, \varphi|_{\Omega} \rangle = \lambda \langle P(S), \varphi \rangle + \langle P(T), \varphi \rangle.$$

Ainsi $P(\lambda S + T) = \lambda P(S) + P(T)$ donc P est linéaire.

Pour la continuité, considérons $T_n \rightarrow 0$ dans $\mathcal{E}'(\Omega)$ alors il existe un compact $K \subset \Omega$ tel que

$$\text{Supp } T_n \subset K, \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad \langle T_n, \varphi \rangle \rightarrow 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{E}(\Omega).$$

Comme $\text{Supp } (P(T_n)) = \text{Supp } T_n \subset K$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, alors la suite $(P(T_n))_n$ vérifie la condition de support. Ensuite si $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$, $\varphi|_{\Omega} \in \mathcal{E}(\Omega)$ et

$$\langle P(T_n), \varphi \rangle = \langle T_n, \varphi|_{\Omega} \rangle \rightarrow 0,$$

et on conclut que $P(T_n) \rightarrow 0$ dans $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$ donc l'application P est continue.

3) Soit $\alpha \in \mathbb{N}^N$, montrons que $\partial^\alpha (P(T)) = P(\partial^\alpha T)$, c'est-à-dire que le prolongement par 0 et la dérivation commutent.

Soit $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$

$$\begin{aligned} \langle \partial^\alpha (P(T)), \varphi \rangle &= (-1)^{|\alpha|} \langle P(T), \partial^\alpha \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, (\partial^\alpha \varphi)|_{\Omega} \rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha (\varphi|_{\Omega}) \rangle = \langle \partial^\alpha T, \varphi|_{\Omega} \rangle = \langle P(\partial^\alpha T), \varphi \rangle, \end{aligned}$$

d'où le résultat.

Solution 3.4. Soit ω_T l'ouvert d'annulation de T , $T = 0$ sur ω_T donc elle est C^∞ sur ω_T de sorte que $\omega_T \subset (\Omega \setminus \text{Suppsing } T)$, c'est-à-dire

$$\text{Suppsing } T \subset \text{Supp } T.$$

Concernant les distributions données, elles ont toutes pour support singulier $\{0\}$.

Solution 3.5. $T = \sum_{k=0}^n a_k \delta^{(k)} \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ et

$$\langle T, 1 \rangle = 0 = \sum_{k=0}^m a_k (-1)^k \langle \delta, 1^{(k)} \rangle = a_0,$$

ainsi $a_0 = 0$.

De même, en considérant les fonctions

$$\varphi_n = \frac{x^n}{n!}, \quad 0 \leq n \leq m,$$

on montre que $a_n = 0$. En effet,

$$\varphi_n^{(k)}(x) = \frac{x^{n-k}}{(n-k)!} \text{ si } 0 \leq k \leq n \text{ et } \varphi_n^{(k)}(x) = 0 \text{ si } k \geq n+1.$$

Par conséquent

$$\varphi_n^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq n, \\ 1 & \text{si } k = n. \end{cases}$$

On a donc pour $0 \leq n \leq m$

$$0 = \langle T, \varphi_n \rangle = \sum_{k=0}^m a_k (-1)^k \varphi_n^{(k)}(0) = (-1)^n a_n,$$

donc $a_n = 0$, pour $0 \leq n \leq m$.

Solution 3.6. Les racines de $1 - e^{ix} = 0$ sont $x_k = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (et elles sont simples) par conséquent d'après l'exercice 1, si $(1 - e^{ix}) T = 0$, alors $\text{Supp } T \subset 2\pi\mathbb{Z}$. On va montrer que les solutions de $(1 - e^{ix}) T = 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ sont données par

$$T = \sum_{k \in \mathbb{Z}} C_k \delta_{2k\pi}, \quad C_k \in \mathbb{R},$$

ces séries étant convergentes dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

► Si $T = \sum_{k \in \mathbb{Z}} C_k \delta_{2k\pi}$, $C_k \in \mathbb{R}$, alors

$$(1 - e^{ix}) T = \sum_{k \in \mathbb{Z}} C_k (1 - e^{ix}) \delta_{2k\pi} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} C_k (1 - e^{i2k\pi}) \delta_{2k\pi} = 0.$$

► Réciproquement, on écrit $\mathbb{R} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \omega_k$ où

$$\omega_k = \left] -\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right[,$$

et on utilise le principe de localisation : $(1 - e^{ix})T = 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ si et seulement si $(1 - e^{ix})T = 0$ dans $\mathcal{D}'(\omega_k)$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.

Soit $k \in \mathbb{Z}$, comme dans chaque ouvert ω_k , l'équation $1 - e^{ix} = 0$ admet une seule racine (simple) $2k\pi$, alors dans $\mathcal{D}'(\omega_k)$, l'équation $(1 - e^{ix})T = 0$ est équivalente à $(x - 2k\pi)T = 0$ dont la solution générale est $T_k = C_k \delta_{2k\pi}$, $C_k \in \mathbb{R}$.

Maintenant si pour deux entiers distincts k et l , $\omega_k \cap \omega_l \neq \emptyset$ alors nécessairement k et l sont consécutifs. Soit $k \in \mathbb{Z}$ et $l = k + 1$, on a $\omega_k \cap \omega_l = \left] -\frac{3\pi}{2} + 2(k+1)\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right[$ et cet intervalle ne contient ni $2k\pi$ ni $2(k+1)\pi$, donc

$$\delta_{2k\pi} = \delta_{2(k+1)\pi} = 0 \quad \text{sur } \left] -\frac{3\pi}{2} + 2(k+1)\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right[.$$

La condition de compatibilité

$$T_k|_{\omega_k \cap \omega_l} = T_l|_{\omega_k \cap \omega_l} \quad k, l \in \mathbb{Z}, k \neq l,$$

est donc vérifiée. On déduit d'après le principe de recollement des distributions qu'il existe une unique distribution T sur $\mathbb{R}$ telle que

$$T|_{\omega_k} = T_k, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Posons $S = \sum_{k \in \mathbb{Z}} T_k$. Clairement S est une distribution sur $\mathbb{R}$ telle que $S|_{\omega_k} = T_k$, $\forall k \in \mathbb{Z}$ et on conclut alors que $T = S$.

Solution 3.7. Dans cet exercice, nous noterons ω_T l'ouvert d'annulation de la distribution T .

▷ $T_1 = \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta_n$. On sait que $T_1 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, on veut déterminer son support. Comme $\text{Supp } \delta_n = \{n\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, nous allons montrer que $\text{Supp } T_1 = \mathbb{N}$ ou encore $\omega_{T_1} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$.

◇ $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ sur lequel T_1 est nulle. En effet si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{N})$ alors $\varphi(n) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, donc $\langle T_1, \varphi \rangle = 0$. Par conséquent $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N} \subset \omega_{T_1}$.

◇ Soit $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}$ un ouvert plus grand que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ et soit $m \in \mathbb{N} \cap \mathcal{O}$, alors $V =]m-1, m+1[\subset \mathcal{O}$ et si $\theta \in \mathcal{D}(V)$ est telle que $\theta = 1$ au voisinage de m , alors

$$\langle T_1, \theta \rangle = \theta(m) = 1.$$

Ainsi $T_1|_{\mathcal{O}} \neq 0$. Par conséquent $\omega_{T_1} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ et donc $\text{Supp } T_1 = \mathbb{N}$.

▷ $T_2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} e^{-n} \delta_{\frac{1}{n}}$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$|\langle e^{-n} \delta_{\frac{1}{n}}, \varphi \rangle| = e^{-n} \left| \varphi\left(\frac{1}{n}\right) \right| \leq \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R})} e^{-n},$$

et comme la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} e^{-n}$ est convergente, on déduit que la série de distributions converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, c'est à dire $T_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Montrons que $\text{Supp } T_2 = \overline{\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}} = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{0\}$. Notons F cet ensemble.

◇ On vérifie facilement que T_2 est nulle sur l'ouvert $\mathbb{R} \setminus F$.

◇ Soit $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}$ un ouvert plus grand que $\mathbb{R} \setminus F$ et soit $x \in F \cap \mathcal{O}$.

Si $x \neq 0$ alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x = \frac{1}{n}$. Soit $\theta \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$ telle que $\theta \geq 0$ et $\theta = 1$ au voisinage de $\frac{1}{n}$, alors

$$\langle T_2, \theta \rangle \geq e^{-n} \theta\left(\frac{1}{n}\right) = e^{-n}.$$

Si $x = 0$, comme $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n} \in \mathcal{O}$, $\forall n > n_0$. On se ramène ainsi au cas précédent. En conclusion $T_2|_{\mathcal{O}} \neq 0$, donc $\omega_{T_2} = \mathbb{R} \setminus F$ et $\text{Supp } T_2 = F$.

▷ T_3 est la distribution régulière associée à la fonction $(\text{Log } x)1_{[0,1]}$ donc

$$\text{Supp } T_3 = \text{Supp}((\text{Log } x)1_{[0,1]}) = [0, 1].$$

▷ Comme

$$\langle T_4, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x^2) dx = 2 \int_0^{+\infty} \varphi(x^2) dx = \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(y)}{\sqrt{y}} dy, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),$$

alors T_4 est la distribution régulière associée à la fonction $\frac{H}{\sqrt{y}}$ donc $\text{Supp } T_4 = [0, +\infty[$.

▷ Soit $\Gamma = \{(x, \lambda x), x \in \mathbb{R}\}$. On notera que

$$\langle T_5, \varphi \rangle = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} \int_{\Gamma} \varphi(x, y) dl, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2),$$

de sorte que T_5 est la distribution simple couche $\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} \delta_{\Gamma}$. Nous allons montrer que $\text{Supp } T_5 = \Gamma$.

Il est facile de voir que l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma \subset \omega_{T_5}$. Soit $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2$ un plus grand ouvert et soit $M_0 = (x_0, \lambda x_0) \in \Gamma \cap \mathcal{O}$. Supposons $\lambda \geq 0$ et soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ tels que $x_0 \in]a, b[$ et $K =: [a, b] \times [\lambda a, \lambda b] \subset \mathcal{O}$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$ telle que $0 \leq \varphi \leq 1$ et $\varphi = 1$ sur un voisinage de K . Alors

$$\langle T_5, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, \lambda x) dx \geq \int_a^b \varphi(x, \lambda x) dx = b - a > 0.$$

Dans le cas où $\lambda < 0$, on prend $K =: [a, b] \times [\lambda b, \lambda a]$.

On conclut que $T_5|_{\mathcal{O}} \neq 0$, donc $\omega_{T_5} = \mathbb{R} \setminus \Gamma$ et $\text{Supp } T_5 = \Gamma$.

▷ Soit $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$, alors

$$\langle T_6, \varphi \rangle = \int_{S^1} \varphi(x, y) dl,$$

donc $T_6 = \delta_{S^1}$ et on vérifie comme ci-dessus que $\text{Supp } T_6 = S^1$.

Solution 3.8. 1) Pour $x = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$,

$$\begin{aligned} H_N(x) &= \underbrace{H \otimes \dots \otimes H}_{N \text{ fois}}(x_1, x_2, \dots, x_N) = H(x_1) H(x_2) \dots H(x_N) \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } x_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

De plus, on a dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$

$$\frac{\partial^N H_N}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_N} = \partial^\alpha (H \otimes H \otimes \dots \otimes H), \quad \alpha = (1, 1, \dots, 1).$$

Par conséquent

$$\frac{\partial^N H_N}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_N} = \underbrace{H' \otimes H' \otimes \dots \otimes H'}_{N \text{ fois}} = \underbrace{\delta \otimes \delta \otimes \dots \otimes \delta}_{N \text{ fois}} = \delta_{0_{\mathbb{R}^N}}.$$

2) Soit $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$ et $a = (a_1, a_2, \dots, a_N) \in \mathbb{R}^N$

$$\partial^{\alpha_1} \delta_{a_1} \otimes \partial^{\alpha_2} \delta_{a_2} \otimes \dots \otimes \partial^{\alpha_N} \delta_{a_N} = \partial^{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)} (\delta_{a_1} \otimes \delta_{a_2} \otimes \dots \otimes \delta_{a_N}) = \partial^\alpha \delta_a.$$

Solution 3.9. En utilisant un résultat de densité, il suffit de vérifier l'égalité

$$\langle \tau_{(a,b)}(S \otimes T), \varphi \rangle = \langle (\tau_a S) \otimes (\tau_b T), \varphi \rangle$$

sur les fonctions test de la forme $\varphi = \varphi_1 \otimes \varphi_2$ où $\varphi_i \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned} \langle \tau_{(a,b)}(S \otimes T), \varphi_1 \otimes \varphi_2 \rangle &= \langle S \otimes T, \tau_{(-a,-b)}(\varphi_1 \otimes \varphi_2) \rangle \\ &= \langle S \otimes T, \tau_{-a} \varphi_1 \otimes \tau_{-b} \varphi_2 \rangle = \langle S, \tau_{-a} \varphi_1 \rangle \langle T, \tau_{-b} \varphi_2 \rangle \\ &= \langle \tau_a S, \varphi_1 \rangle \langle \tau_b T, \varphi_2 \rangle = \langle (\tau_a S) \otimes (\tau_b T), \varphi_1 \otimes \varphi_2 \rangle, \end{aligned}$$

d'où le résultat.

On vérifie de la même manière que

$$\Pi_\lambda(S \otimes T) = (\Pi_\lambda S) \otimes (\Pi_\lambda T), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^*.$$

Solution 3.10. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega \times I)$, alors

$$\varphi(\cdot, y) \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \forall y \in I \quad \text{et} \quad \varphi(x, \cdot) \in \mathcal{D}(I), \quad \forall x \in \Omega.$$

De plus

$$\begin{aligned} \int_I \langle T(x), \varphi(x, y) \rangle dy &= \langle 1(y), \langle T(x), \varphi(x, y) \rangle \rangle = \langle T \otimes 1, \varphi \rangle \\ &= \langle T(x), \langle 1(y), \varphi(x, y) \rangle \rangle = \langle T(x), \int_I \varphi(x, y) dy \rangle. \end{aligned}$$

Solution 3.11. 1) On a

$$\frac{\partial(T \otimes 1)}{\partial y} = T \otimes \frac{\partial(1)}{\partial y} = T \otimes 0 = 0.$$

2) a) Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on définit $L_\varphi : \mathcal{D}(I) \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$L_\varphi(\psi) = \langle S, \varphi \otimes \psi \rangle, \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(I).$$

Soit $M_\varphi : \mathcal{D}(I) \rightarrow \mathcal{D}(\Omega \times I)$ l'application définie par

$$M_\varphi(\psi) = \varphi \otimes \psi, \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(I).$$

Alors $L_\varphi = S \circ M_\varphi$: c'est la composée de deux applications linéaires. Montrons que L_φ est continue. Noter que $L_0 = 0$, considérons alors le cas où φ n'est pas nulle. Soit K un compact inclus dans I et K' un compact de Ω tel que $\text{Supp} \varphi \subset K'$. Comme S est continue sur $\mathcal{D}(\Omega \times I)$, pour le compact $K' \times K \subset \Omega \times I$, il existe $C' > 0$ et $m' \in \mathbb{N}$ tels que

$$|\langle S, \xi \rangle| \leq C' \sum_{|(\alpha, k)| \leq m'} \|\partial^{(\alpha, k)} \xi\|_{L^\infty(K' \times K)}, \quad \forall \xi \in \mathcal{D}_{K' \times K}(\Omega \times I).$$

Soit $\psi \in \mathcal{D}_K(I)$, comme $\text{Supp}(\varphi \otimes \psi) \subset K' \times K$, en appliquant l'inégalité précédente à $\xi = \varphi \otimes \psi$, on obtient

$$|\langle L_\varphi, \psi \rangle| = |\langle S, \varphi \otimes \psi \rangle| \leq C' \sum_{|(\alpha, k)| \leq m'} \|\partial^\alpha \varphi \otimes \psi^{(k)}\|_{L^\infty(K' \times K)}.$$

Noter que $|(\alpha, k)| = |\alpha| + k$ donc si $|(\alpha, k)| \leq m'$ alors $|\alpha| \leq m'$ et $k \leq m'$, d'où

$$|\langle L_\varphi, \psi \rangle| \leq C' \sum_{|\alpha| \leq m'} \|\partial^\alpha \varphi\|_{L^\infty(K')} \sum_{k=0}^{m'} \|\psi^{(k)}\|_{L^\infty(K)} \leq C \sum_{k=0}^{m'} \|\psi^{(k)}\|_{L^\infty(K)},$$

où $C = C' \sum_{|\alpha| \leq m'} \|\partial^\alpha \varphi\|_{L^\infty(K)}$. On conclut que L_φ est continue sur $\mathcal{D}(I)$ et donc que L_φ définit une distribution sur I .

Calculons maintenant sa dérivée. Soit $\psi \in \mathcal{D}(I)$

$$\langle (L_\varphi)', \psi \rangle = -\langle L_\varphi, \psi' \rangle = -\langle S, \varphi \otimes \psi' \rangle = \langle \partial_y S, \varphi \otimes \psi \rangle = 0.$$

Par conséquent $(L_\varphi)' = 0$ dans $\mathcal{D}'(I)$ et donc la distribution L_φ est constante.

On a donc montré que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, il existe une constante $C(\varphi) \in \mathbb{R}$ telle que $L_\varphi = C(\varphi)$ c'est-à-dire

$$\langle L_\varphi, \psi \rangle = C(\varphi) \int_I \psi(x) dx, \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(I).$$

Vérifions l'unicité de $C(\varphi)$: supposons qu'il existe une autre constante $D(\varphi)$ telle que

$$\langle S, \varphi \otimes \psi \rangle = C(\varphi) \int_I \psi(x) dx = D(\varphi) \int_I \psi(y) dy, \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(I).$$

En appliquant cette égalité à une fonction test $\theta \in \mathcal{D}(I)$ telle que $\int_I \theta(x) dx = 1$, on déduit que $C(\varphi) = D(\varphi)$.

b) Soit $\theta \in \mathcal{D}(I)$ telle que $\int_I \theta(y) dy = 1$. Alors

$$\langle T, \varphi \rangle = C(\varphi) = \langle S, \varphi \otimes \theta \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Soit $\mathbb{M}_\theta : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}(\Omega \times I)$ l'application linéaire définie par

$$\mathbb{M}_\theta(\varphi) = \varphi \otimes \theta, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Alors $T = S \circ \mathbb{M}_\theta$ et donc T est linéaire sur $\mathcal{D}(\Omega)$ et on vérifie, comme pour L_φ , que T est continue donc c'est une distribution sur Ω .

Maintenant pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $\psi \in \mathcal{D}(I)$, on a

$$\langle S, \varphi \otimes \psi \rangle = C(\varphi) \int_I \psi(y) dy = \langle T, \varphi \rangle \langle 1, \psi \rangle = \langle T \otimes 1, \varphi \otimes \psi \rangle,$$

d'où on conclut que $S = T \otimes 1$.

Conclusion : $\frac{\partial S}{\partial y} = 0$ dans $\mathcal{D}'(\Omega \times I)$ si et seulement si, il existe $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ telle que $S = T \otimes 1$.

Solution 3.12. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ alors la fonction $x \mapsto \psi(x) = \varphi(x, 0)$ est dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Par conséquent

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x, 0)}{x} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\psi(x)}{x} dx = \langle Vp \frac{1}{x}, \psi \rangle \\ &= \left\langle Vp \frac{1}{x}, \langle \delta(y), \varphi(x, y) \rangle \right\rangle = \langle Vp \frac{1}{x} \otimes \delta, \varphi \rangle, \end{aligned}$$

donc $T = Vp \frac{1}{x} \otimes \delta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

Solution 3.13. On remarquera que la fonction $(x, y) \mapsto \frac{1}{xy}$ n'est pas localement intégrable sur $\mathbb{R}^2$:

$$\iint_{|x| \leq 1, |y| \leq 1} \frac{1}{|xy|} dx dy = \left(\int_{|x| \leq 1} \frac{1}{|x|} dx \right)^2 = +\infty,$$

donc cette fonction ne définit pas une distribution sur $\mathbb{R}^2$.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ et $a > 0$ tel que $\text{Supp } \varphi \subset [-a, a]^2$. Pour $\varepsilon > 0$ petit, on écrit

$$\iint_{|x| \geq \varepsilon, |y| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x, y)}{xy} dx dy = \iint_{\varepsilon \leq |x| \leq a, \varepsilon \leq |y| \leq a} \frac{\psi(x, y) + \xi(x, y)}{xy} dx dy,$$

où

$$\psi(x, y) = (\varphi(x, y) - \varphi(x, 0)) - (\varphi(0, y) - \varphi(0, 0)),$$

$$\xi(x, y) = \varphi(x, 0) + \varphi(0, y) - \varphi(0, 0).$$

Comme $\int_{\varepsilon \leq |z| \leq a} \frac{dz}{z} = 0$, alors $\iint_{\varepsilon \leq |x| \leq a, \varepsilon \leq |y| \leq a} \frac{\xi(x, y)}{xy} dx dy = 0$. En effet

$$\iint_{\varepsilon \leq |x| \leq a, \varepsilon \leq |y| \leq a} \frac{\varphi(x, 0)}{xy} dx dy = \left(\int_{\varepsilon \leq |x| \leq a} \frac{\varphi(x, 0)}{x} dx \right) \int_{\varepsilon \leq |y| \leq a} \frac{dy}{y} = 0,$$

et de même

$$\iint_{\varepsilon \leq |x| \leq a, \varepsilon \leq |y| \leq a} \frac{\varphi(0, y) - \varphi(0, 0)}{xy} dx dy = 0.$$

Maintenant, d'après la formule de Taylor

$$\varphi(x, y) - \varphi(x, 0) = y \int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, ty) dt,$$

$$\varphi(0, y) - \varphi(0, 0) = y \int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial y}(0, ty) dt,$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \psi(x, y) &= y \int_0^1 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, ty) - \frac{\partial \varphi}{\partial y}(0, ty) \right) dt \\ &= y \int_0^1 \left(x \int_0^1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(sx, ty) ds \right) dt = xy \eta(x, y), \end{aligned}$$

où

$$\eta : (x, y) \mapsto \iint_{[0,1]^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(sx, ty) ds dt$$

est une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$. Par conséquent

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \iint_{|x| \geq \varepsilon, |y| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x, y)}{xy} dx dy &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \iint_{\varepsilon \leq |x| \leq a, \varepsilon \leq |y| \leq a} \eta(x, y) dx dy \\ &= \iint_{[-a, a]^2} \eta(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

On conclut que T est bien définie sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$. Clairement T est linéaire et avec les notations précédentes, on a pour tout compact $K \subset [-a, a]^2$ et toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R}^2)$

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq 4a^2 \|\eta\|_{L^\infty(K)} \leq 4a^2 \left\| \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right\|_{L^\infty(K)}.$$

Par conséquent T est une distribution sur $\mathbb{R}^2$, d'ordre inférieur ou égal à 2.

Soit maintenant $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}\langle T, \varphi_1 \otimes \varphi_2 \rangle &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \iint_{|x| \geq \varepsilon, |y| \geq \varepsilon} \frac{\varphi_1(x) \varphi_2(y)}{xy} dx dy \\ &= \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi_1(x)}{x} dx \right) \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|y| \geq \varepsilon} \frac{\varphi_2(y)}{y} dy \right) \\ &= \langle Vp \frac{1}{x}, \varphi_1 \rangle \langle Vp \frac{1}{y}, \varphi_2 \rangle = \langle Vp \frac{1}{x} \otimes Vp \frac{1}{y}, \varphi_1 \otimes \varphi_2 \rangle,\end{aligned}$$

d'où on conclut que

$$T = Vp \frac{1}{x} \otimes Vp \frac{1}{y}.$$

Solution 3.14. 1) Nous allons résoudre dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$, le système d'équations

$$xT = yT = 0,$$

en procédant comme pour la résolution de l'équation $xT = 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, voir l'exercice 2.27.

Soit $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$; $\theta = 1$ sur un voisinage de 0. Pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, il existe une unique fonction $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ telle que

$$\varphi(x, y) = \varphi(x, 0)\theta(y) + y\psi(x, y).$$

ψ est donnée par

$$\psi(x, y) = \begin{cases} \frac{\varphi(x, y) - \varphi(x, 0)\theta(y)}{y} & \text{si } y \neq 0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, 0) & \text{si } y = 0. \end{cases}$$

Sachant que $yT = 0$, on a alors pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \varphi(x, 0)\theta(y) \rangle + \langle yT, \psi \rangle = \langle T, \varphi(x, 0)\theta(y) \rangle.$$

Ainsi

$$yT = 0 \Rightarrow \langle T, \varphi \rangle = \langle T, \varphi(x, 0)\theta(y) \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2),$$

où $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ est telle que $\theta = 1$ sur un voisinage de 0.

Soit $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\eta = 1$ sur un voisinage de 0 (on peut prendre $\eta = \theta$). Pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, comme $\varphi(x, 0) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ alors il existe une unique fonction $\xi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que

$$\varphi(x, 0) = \varphi(0, 0)\eta(x) + x\xi(x).$$

Sachant que $xT = 0$, on obtient

$$\begin{aligned}\langle T, \varphi \rangle &= \langle T, \varphi(x, 0)\theta(y) \rangle = \langle T, \varphi(0, 0)\eta(x)\theta(y) \rangle + \langle xT, \xi(x)\theta(y) \rangle \\ &= \varphi(0, 0)\langle T, \eta \otimes \theta \rangle = C\langle \delta_{(0,0)}, \varphi \rangle,\end{aligned}$$

où $C = \langle T, \eta \otimes \theta \rangle$ et donc $T = C\delta_{(0,0)}$.

Réciproquement, on vérifie que pour toute constante $C \in \mathbb{R}$, $C\delta_{(0,0)}$ vérifie les équations $xT = yT = 0$.

Ainsi $xT = yT = 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ si et seulement

$$T = C\delta_{(0,0)}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

2) Maintenant on veut résoudre l'équation $yS = 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$. D'après la question précédente

$$\langle S, \varphi \rangle = \langle S, \varphi(x, 0)\theta(y) \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2),$$

où $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ est telle que $\theta = 1$ sur un voisinage de 0. En particulier

$$\langle S, \varphi_1 \otimes \varphi_2 \rangle = \langle S, \varphi_1(x) \varphi_2(0) \theta(y) \rangle = \varphi_2(0) \langle S, \varphi_1 \otimes \theta \rangle, \quad \forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

On pose

$$\langle U, \varphi_1 \rangle = \langle S, \varphi_1 \otimes \theta \rangle, \quad \forall \varphi_1 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

On vérifie que $U \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et on écrit pour $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\langle S, \varphi_1 \otimes \varphi_2 \rangle = \varphi_2(0) \langle U, \varphi_1 \rangle = \langle U, \varphi_1 \rangle \langle \delta, \varphi_2 \rangle = \langle U \otimes \delta, \varphi_1 \otimes \varphi_2 \rangle,$$

et on conclut que $S = U \otimes \delta$.

Réciproquement, soit $U \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ alors

$$y(U \otimes \delta) = U \otimes (y\delta) = U \otimes 0 = 0.$$

Ainsi $yS = 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ si et seulement si

$$\exists U \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}); \quad S = U \otimes \delta.$$

Remarques : 1) Ce résultat se généralise en dimension quelconque : $yS = 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R})$ si et seulement si, il existe $U \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ telle que $S = U \otimes \delta$.

2) En utilisant l'exercice 3.1, on déduit que si $xT = yT = 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$, alors $\text{Supp } T \subset \{(0, 0)\}$ donc $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^2)$. Soit $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$, on écrit en utilisant la formule de Taylor

$$\varphi(x, y) = \varphi(0, 0) + x\varphi_1(x, y) + y\varphi_2(x, y),$$

$$\text{où } \varphi_1(x, y) = \int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial x}(tx, ty) dt \text{ et } \varphi_2(x, y) = \int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial y}(tx, ty) dt, \text{ donc}$$

$$\langle T, \varphi \rangle = \varphi(0, 0) \langle T, 1 \rangle + \langle xT, \varphi_1 \rangle + \langle yT, \varphi_2 \rangle = C \langle \delta, \varphi \rangle,$$

ce qui entraîne $T = C\delta$ où $C = \langle T, 1 \rangle$.

Solution 3.15. On sait que $f * g$ est définie si $\int_{\mathbb{R}^N} f(y) g(x - y) dy$ a un sens pour presque tout $x \in \mathbb{R}^N$.

Soient $T_f, T_g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ les distributions associées aux fonctions f et g respectivement, comme $\text{Supp } T_f = \text{Supp } f$ et $\text{Supp } T_g = \text{Supp } g$ alors $T_f * T_g$ existe, $T_f * T_g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ et on a pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$

$$\langle T_f * T_g, \varphi \rangle = \langle T_f \otimes T_g, \varphi^\Delta \rangle, \quad \text{où } \varphi^\Delta(x, y) = \varphi(x + y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N.$$

Sachant que $T_f \otimes T_g = T_{f \otimes g}$, avec $f \otimes g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$, on a pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$

$$\begin{aligned} \langle T_f * T_g, \varphi \rangle &= \langle T_{f \otimes g}, \varphi^\Delta \rangle = \iint_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} f \otimes g(x, y) \varphi^\Delta(x, y) dx dy \\ &= \iint_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} f(x) g(y) \varphi(x + y) dx dy \\ &= \iint_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} \psi_1(x, y) dx dy = \iint_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} \psi_2(x, z) dx dz, \end{aligned} \tag{3.1}$$

où on a posé

$$\psi_1(x, y) = f(x) g(y) \varphi(x + y),$$

$$\psi_2(x, z) = f(x) g(z - x) \varphi(z).$$

La dernière égalité découle du changement de variables $x = x$, $x + y = z$ et d'après le théorème de changement de variables $\psi_2 \in L^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ si et seulement si $\psi_1 \in L^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$. Or

$$\iint_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} |\psi_1(x, y)| dx dy = \iint_{K_\varphi} |\psi_1(x, y)| dx dy,$$

où $K_\varphi = (\text{Supp } f \times \text{Supp } g) \cap \text{Supp } \varphi^\Delta$ est compact car $\text{Supp } f$ et $\text{Supp } g$ sont convolutifs. Soient K_1, K_2 deux compacts de $\mathbb{R}^N$ tels que $K_\varphi \subset K_1 \times K_2$, on a donc

$$\iint_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} |\psi_1(x, y)| dx dy \leq \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \iint_{K_1 \times K_2} |f(x)| |g(y)| dx dy,$$

avec

$$\iint_{K_1 \times K_2} |f(x)| |g(y)| dx dy = \left(\int_{K_1} |f(x)| dx \right) \left(\int_{K_2} |g(y)| dy \right) < \infty,$$

donc $\psi_1 \in L^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$, ce qui entraîne que $\psi_2 \in L^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$.

Maintenant, d'après le théorème de Fubini

$$p.p. z \in \mathbb{R}^N, \quad \int_{\mathbb{R}^N} |\psi_2(x, z)| dz = |\varphi(z)| \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)| |g(z-x)| dx < \infty,$$

et ce pour toute fonction arbitraire $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. Donc pour presque tout $z \in \mathbb{R}^N$, en choisissant $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ telle que $\varphi = 1$ au voisinage de z , on déduit que

$$\text{la fonction } x \mapsto f(x) g(z-x) \text{ est dans } L^1(\mathbb{R}^N),$$

donc $\int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} f(x) g(z-x) dx$ a un sens pour presque tout $z \in \mathbb{R}^N$. On conclut donc que $f * g$ est définie presque partout sur $\mathbb{R}^N$ et

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(z) g(x-z) dz.$$

Montrons maintenant que $f * g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Soit K un compact de $\mathbb{R}^N$

$$\int_K |f * g(z)| dz = \int_K \left| \int_{\mathbb{R}^N} f(x) g(z-x) dx \right| dz \leq \iint_{K \times \mathbb{R}^N} |f(x)| |g(z-x)| dx dz.$$

On introduit une fonction plateau $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, subordonnée au compact K donc $\varphi = 1$ sur un voisinage de K . On peut alors écrire

$$\iint_{K \times \mathbb{R}^N} |f(x)| |g(z-x)| dx dz = \iint_{K \times \mathbb{R}^N} |\psi_2(x, z)| dx dz,$$

où $\psi_2(x, z) = f(x) g(z-x) \varphi(z) \in L^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ d'après ce qui précède. Ainsi $\int_K |f * g(z)| dz < \infty$ et on conclut que $f * g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$,

$$\begin{aligned} \langle T_{f*g}, \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^N} f * g(z) \varphi(z) dz = \int_{\mathbb{R}^N} \left[\int_{\mathbb{R}^N} f(x) g(z-x) dx \right] \varphi(z) dz \\ &= \iint_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} f(x) g(z-x) \varphi(z) dx dz, \end{aligned}$$

d'après le théorème de Fubini et en comparant avec (3.1), on voit que

$$\langle T_{f*g}, \varphi \rangle = \langle T_f * T_g, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N),$$

d'où on conclut que

$$T_{f*g} = T_f * T_g.$$

Solution 3.16. $S * T$ existe et définit une distribution sur $\mathbb{R}$. Les fonctions $x^n, e^{\alpha x} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ donc $x^n(S * T), e^{\alpha x}(S * T) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

1) Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\langle x^n (S * T), \varphi \rangle = \langle S * T, x^n \varphi \rangle = \langle S \otimes T, \psi^\Delta \rangle,$$

où $\psi = x^n \varphi$ et $\psi^\Delta(x, y) = \psi(x + y) = (x + y)^n \varphi(x + y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. En utilisant la formule du binôme de Newton, on obtient

$$\begin{aligned} \langle x^n (S * T), \varphi \rangle &= \left\langle S \otimes T, \sum_{k=0}^n \mathcal{C}_n^k x^k y^{n-k} \varphi(x + y) \right\rangle \\ &= \sum_{k=0}^n \mathcal{C}_n^k \langle (x^k S) \otimes (y^{n-k} T), \varphi(x + y) \rangle \\ &= \sum_{k=0}^n \mathcal{C}_n^k \langle (x^k S) * (x^{n-k} T), \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$x^n (S * T) = \sum_{k=0}^n \mathcal{C}_n^k (x^k S) * (x^{n-k} T).$$

2) Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\langle e^{\alpha x} (S * T), \varphi \rangle = \langle S * T, e^{\alpha x} \varphi \rangle = \langle S \otimes T, \Phi^\Delta \rangle,$$

où $\Phi = e^{\alpha x} \varphi$ et $\Phi^\Delta(x, y) = \Phi(x + y) = e^{\alpha(x+y)} \varphi(x + y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Par conséquent

$$\begin{aligned} \langle e^{\alpha x} (S * T), \varphi \rangle &= \langle S \otimes T, e^{\alpha x} e^{\alpha y} \varphi(x + y) \rangle \\ &= \langle (e^{\alpha x} S) \otimes (e^{\alpha y} T), \varphi(x + y) \rangle \\ &= \langle (e^{\alpha x} S) * (e^{\alpha x} T), \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Ainsi

$$e^{\alpha x} (S * T) = (e^{\alpha x} S) * (e^{\alpha x} T).$$

Solution 3.17. 1) D'après l'exercice 3.15, la fonction $f * g$ est bien définie sur $\mathbb{R}$, $f * g \in L_{loc}^1(\mathbb{R})$ et p.p. $x \in \mathbb{R}$

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) g(x - y) dy = \int_{I_x} f(y) g(x - y) dy,$$

où $I_x = \{y \geq 0; x - y \geq 0\}$.

▷ Si $x < 0$ alors $I_x = \emptyset$ et $f * g(x) = \int_{\emptyset} f(y) g(x - y) dy = 0$.

▷ Si $x \geq 0$, $I_x = [0, x]$ et $f * g(x) = \int_0^x f(y) g(x-y) dy$.

Ainsi

$$f * g(x) = H(x) \int_0^x f(y) g(x-y) dy.$$

On aurait pu affirmer directement que $f * g(x) = 0$ pour $x < 0$; f et g étant dans $\mathcal{D}'_+$, leur convolution l'est aussi.

2) f et H sont dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{D}'_+$, donc d'après ce qui précède

$$f * H(x) = H(x) \int_0^x f(y) H(x-y) dy = H(x) \int_0^x f(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, nous avons

$$(f * H)' = f * H' = f * \delta = f.$$

Ainsi $f * H$ est une primitive de f dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. En fait $f * H$ est la seule primitive de f dans $\mathcal{D}'_+$, les primitives dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ étant alors $f * H + C$, $C \in \mathbb{R}$.

Remarque : Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, si $T * H$ est définie, alors c'est une primitive de T .

3) $f_1 H, f_2 H \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{D}'_+$ et d'après la première question

$$(f_1 H) * (f_2 H) = H(x) \int_0^x f_1(y) f_2(x-y) dy.$$

Ainsi pour $a, b \in \mathbb{R}$

$$e^{ax} H * e^{bx} H(x) = H(x) \int_0^x e^{ay} e^{b(x-y)} dy = H(x) e^{bx} \int_0^x e^{(a-b)y} dy.$$

On distingue deux cas :

◇ Si $a = b$

$$e^{ax} H * e^{ax} H(x) = H(x) e^{ax} \int_0^x dy = x e^{ax} H(x).$$

◇ Si $a \neq b$

$$e^{ax} H * e^{bx} H(x) = H(x) e^{bx} \left[\frac{1}{a-b} e^{(a-b)y} \right]_0^x = H(x) \frac{e^{ax} - e^{bx}}{a-b}.$$

Solution 3.18. ▷ $\delta_a * \delta_b$ existe car $\delta_a, \delta_b \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ pour $a, b \in \mathbb{R}$ et on a

$$\delta_a * \delta_b = \tau_a \delta_b = \tau_b \delta_a = \delta_{a+b}.$$

▷ Soit $a \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{N}$, $\delta_a^{(m)} \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ donc $\delta_a^{(m)} * T$ existe dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ pour toute distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et

$$\begin{aligned}\delta_a^{(m)} * T &= (\delta_a * T)^{(m)} = (\tau_a T)^{(m)} \\ &= \delta_a * T^{(m)} = \tau_a(T^{(m)}),\end{aligned}$$

donc la translation et la dérivation commutent.

▷ $H \in L^1_{loc} \cap \mathcal{D}'_+$ donc $H * H$ existe, $H * H \in L^1_{loc} \cap \mathcal{D}'_+$ d'après l'exercice 3.17 et

$$H * H(x) = H(x) \int_0^x H(y) dy = xH(x).$$

On vérifie facilement que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\underbrace{H * H * \dots * H}_{n \text{ fois}} = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} H.$$

▷ La fonction $x \mapsto e^{-|x|}$ est dans $L^1(\mathbb{R})$ puisque

$$\int_{\mathbb{R}} |e^{-|x|}| dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 2,$$

donc la convolution $e^{-|x|} * e^{-|x|}$ existe et définit une fonction de $L^1(\mathbb{R})$ (voir chapitre 1). De plus, la fonction $e^{-|x|}$ étant paire, il en est de même de la fonction $e^{-|x|} * e^{-|x|}$. Nous allons calculer cette convolution pour $x \geq 0$.

$$e^{-|x|} * e^{-|x|}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-|y|} e^{-|x-y|} dy = \int_{-\infty}^0 e^y e^{-|x-y|} dy + \int_0^{+\infty} e^{-y} e^{-|x-y|} dy.$$

On a donc pour $x \geq 0$

$$\begin{aligned}e^{-|x|} * e^{-|x|}(x) &= \int_{-\infty}^0 e^y e^{y-x} dy + \int_0^x e^{-y} e^{y-x} dy + \int_x^{+\infty} e^{-y} e^{x-y} dy \\ &= \frac{1}{2} e^{-x} + x e^{-x} + \frac{1}{2} e^{-x} = (x+1) e^{-x},\end{aligned}$$

puis en utilisant la parité, on déduit que

$$e^{-|x|} * e^{-|x|}(x) = (|x|+1) e^{-|x|}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

▷ Soit $\alpha > 0$, on sait que $e^{-\alpha x^2} \in L^1(\mathbb{R})$ et en intégrant par parties, on voit que

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2\alpha} \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha x^2} dx < \infty.$$

Ainsi $x^2 e^{-\alpha x^2} \in L^1(\mathbb{R})$ et la convolution $e^{-\alpha x^2} * (x^2 e^{-\alpha x^2})$ existe dans $L^1(\mathbb{R})$.

Posons $f(x) = e^{-\alpha x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, on sait (voir l'exercice 1.13) que

$$f * f(x) = e^{-\alpha x^2} * e^{-\alpha x^2}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}} \exp\left(-\frac{\alpha}{2} x^2\right).$$

De plus $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et

$$f'(x) = -2\alpha x e^{-\alpha x^2} = -2\alpha x f(x), \quad f''(x) = -2\alpha f(x) + 4\alpha^2 x^2 f(x),$$

d'où

$$x^2 f = \frac{1}{4\alpha^2} (f'' + 2\alpha f).$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} e^{-\alpha x^2} * (x^2 e^{-\alpha x^2}) &= \frac{1}{4\alpha^2} f * f'' + \frac{1}{2\alpha} f * f \\ &= \frac{1}{4\alpha^2} (f * f)'' + \frac{1}{2\alpha} f * f \\ &= \frac{1}{4\alpha} \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}} (1 + \alpha x^2) e^{-\frac{\alpha}{2} x^2}. \end{aligned}$$

▷ On applique l'exercice 3.17 : $(x^2 H) * (\sin x H)$, $(\cos x H) * (x^3 H)$ et $(\sin x H) * (sh x H)$ existent et après calcul, on trouve

$$\begin{aligned} (x^2 H) * (\sin x H) &= H \int_0^x y^2 \sin(x-y) dy = H (2 \cos x + x^2 - 2), \\ (\cos x H) * (x^3 H) &= H \int_0^x y^3 \cos(x-y) dy = 3H (2 \cos x + x^2 - 2), \\ (\sin x H) * (sh x H) &= H \int_0^x sh y \sin(x-y) dy = \frac{1}{2} H (sh x - \sin x). \end{aligned}$$

▷ $\delta'_a \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ donc la convolution $\delta'_a * Vp \frac{1}{x}$ existe et

$$\delta'_a * Vp \frac{1}{x} = \delta_a * \left(Vp \frac{1}{x} \right)' = -\delta_a * Pf \frac{1}{x^2} = -Pf \frac{1}{(x-a)^2}.$$

▷ $H * Pf \frac{H}{x}$ existe car $H, Pf \frac{H}{x} \in \mathcal{D}'_+$. De plus, (voir l'exercice 3.17) $H * Pf \frac{H}{x}$ est la seule primitive de $Pf \frac{H}{x}$ dans $\mathcal{D}'_+$. Par conséquent, voir l'exercice 2.23

$$H * Pf \frac{H}{x} = H \ln |x|.$$

▷ Les fonctions $1_{[a,b]}$ et $1_{[c,d]}$ sont à supports compacts donc leur convolution existe et comme $1'_{[a,b]} = \delta_a - \delta_b$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, alors

$$(1_{[a,b]} * 1_{[c,d]})'' = 1'_{[a,b]} * 1'_{[c,d]} = (\delta_a - \delta_b) * (\delta_c - \delta_d) = \delta_{a+c} - \delta_{a+d} - \delta_{b+c} + \delta_{b+d}.$$

▷ Les fonctions $\frac{1}{1+x^2}, \frac{x}{(1+x^2)^2}$ sont dans $L^1(\mathbb{R})$, donc leur convolution existe et est dans $L^1(\mathbb{R})$.

Notons $f = \frac{1}{1+x^2}$, alors $f' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$ et

$$\frac{1}{1+x^2} * \frac{x}{(1+x^2)^2} = -\frac{1}{2} f * f' = -\frac{1}{2} (f * f)'.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$f * f(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+y^2)(1+(x-y)^2)} dy.$$

On décompose la fraction rationnelle en éléments simples, en considérant le cas où $x \neq 0$, on trouve

$$\frac{1}{(1+y^2)(1+(x-y)^2)} = \frac{1}{1+x^2} \left(\frac{\frac{2}{x}y+1}{1+y^2} + \frac{\frac{-2}{x}y+3}{1+(x-y)^2} \right),$$

ce qui entraîne que

$$\begin{aligned} f * f(x) &= \frac{1}{1+x^2} \left(\frac{1}{x} \text{Log}(1+y^2) + \text{Arctg } y - \frac{1}{x} \text{Log}(1+(y-x)^2) + \text{Arctg}(y-x) \right) \Big|_{-\infty}^{+\infty} \\ &= \frac{1}{1+x^2} \left(2\pi + \frac{1}{x} \text{Log} \frac{1+y^2}{1+(y-x)^2} \right) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{2\pi}{1+x^2}. \end{aligned}$$

Ainsi $f * f = 2\pi f$ donc

$$\frac{1}{1+x^2} * \frac{x}{(1+x^2)^2} = -\pi f' = \frac{2\pi x}{(1+x^2)^2}.$$

Solution 3.19. Soit T une distribution, on note T^{-1} ses inverses de convolution. On rappelle que dans $\mathcal{D}'_+$, si un inverse existe, il est unique.

▷ Comme $\delta' * H = H' = \delta$, alors $H^{-1} = \delta'$ et $(\delta')^{-1} = H$ dans $\mathcal{D}'_+$. De plus si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est un inverse de δ' alors $T * \delta' = T' = \delta$ donc T est une primitive de δ . Par conséquent $T = H + C$, $C \in \mathbb{R}$. Soit $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ un inverse de H alors $S * H = \delta$. Comme $S * H$ est une primitive de S , alors $\delta' = S$. Par conséquent δ' est l'unique inverse de convolution de H dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. On a donc

$$H^{-1} = \delta' \quad \text{dans } \mathcal{D}'_+ \text{ et } \mathcal{D}'(\mathbb{R}),$$

et

$$(\delta')^{-1} = \begin{cases} H & \text{dans } \mathcal{D}'_+, \\ H + C, \ C \in \mathbb{R} & \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \end{cases}$$

▷ Soit $a \in \mathbb{R}$, on cherche T dans $\mathcal{D}'_+$ telle que $(\delta' - a\delta) * T = \delta$ c'est-à-dire $T' - aT = \delta$. On considère l'équation différentielle : $y' - ay = 0$ dont la solution générale est $y_h = Ce^{ax}$, $C \in \mathbb{R}$. Ensuite, on détermine la solution particulière y_p satisfaisant la condition $y_p(0) = 1$. Elle est obtenue pour $C = 1$ et donc $y_p = e^{ax}$. Par conséquent

$$T = (\delta' - a\delta)^{-1} = \begin{cases} e^{ax} H & \text{dans } \mathcal{D}'_+, \\ e^{ax} H + Ce^{ax}, \ C \in \mathbb{R} & \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \end{cases}$$

▷ Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, déterminons $(\delta'' + \lambda^2 \delta)^{-1}$ dans $\mathcal{D}'_+$ et $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Pour cela, résolvons l'équation différentielle $y'' + \lambda^2 y = 0$. $\pm i\lambda$ sont les racines de son équation caractéristique $r^2 + \lambda^2 = 0$. Nous distinguons alors deux cas :

◇ Si $\lambda \neq 0$ alors la solution générale de l'équation différentielle est

$$y_h = C_1 \cos(\lambda x) + C_2 \sin(\lambda x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

On détermine la solution particulière y_p qui vérifie les deux conditions : $y_p(0) = 0$ et $y'_p(0) = 1$. Après calcul, on trouve que y_p est obtenue pour $C_1 = 0$ et $C_2 = \frac{1}{\lambda}$ c'est-à-dire $y_p = \frac{\sin(\lambda x)}{\lambda}$. On a donc

$$(\delta'' + \lambda^2 \delta)^{-1} = \begin{cases} \frac{\sin(\lambda x)}{\lambda} H & \text{dans } \mathcal{D}'_+, \\ \frac{\sin(\lambda x)}{\lambda} H + C_1 \cos(\lambda x) + C_2 \sin(\lambda x), C_1, C_2 \in \mathbb{R} & \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \end{cases}$$

◇ Si $\lambda = 0$, la solution générale de l'équation différentielle est

$$y_h = C_1 + C_2 x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

et la solution particulière y_p vérifiant $y_p(0) = 0$ et $y'_p(0) = 1$ est $y_p = x$. Par conséquent

$$(\delta'')^{-1} = \begin{cases} xH & \text{dans } \mathcal{D}'_+, \\ xH + C_1 + C_2 x, C_1, C_2 \in \mathbb{R} & \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \end{cases}$$

▷ Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$, déterminons $(\delta'' - \lambda^2 \delta)^{-1}$ dans $\mathcal{D}'_+$ et $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Il faut résoudre l'équation différentielle $y'' - \lambda^2 y = 0$ dont l'équation caractéristique est $r^2 - \lambda^2 = (r - \lambda)(r + \lambda) = 0$. La solution générale de l'équation différentielle est

$$y_h = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

On détermine ensuite la solution particulière y_p qui vérifie les deux conditions : $y_p(0) = 0$ et $y'_p(0) = 1$. Après calcul, on trouve que y_p est obtenue pour $C_1 = \frac{1}{2\lambda}$ et $C_2 = \frac{-1}{2\lambda}$ c'est-à-dire $y_p = \frac{\sinh(\lambda x)}{\lambda}$. On a donc

$$(\delta'' - \lambda^2 \delta)^{-1} = \begin{cases} \frac{\sinh(\lambda x)}{\lambda} H & \text{dans } \mathcal{D}'_+, \\ \frac{\sinh(\lambda x)}{\lambda} H + C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x}, C_1, C_2 \in \mathbb{R} & \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \end{cases}$$

Remarque : On peut aussi utiliser le calcul symbolique dans $\mathcal{D}'_+$. Suivant la factorisation de l'équation caractéristique, on peut vérifier que

$$\delta'' - \lambda^2 \delta = (\delta' - \lambda \delta) * (\delta' + \lambda \delta).$$

Par conséquent dans $\mathcal{D}'_+$

$$\begin{aligned} (\delta'' - \lambda^2 \delta)^{-1} &= (\delta' - \lambda \delta)^{-1} * (\delta' + \lambda \delta)^{-1} \\ &= e^{\lambda x} H * e^{-\lambda x} H = H \int_0^x e^{\lambda y} e^{-\lambda(x-y)} dy = \frac{\sinh(\lambda x)}{\lambda} H. \end{aligned}$$

▷ En procédant comme pour les exemples précédents, on trouve

$$(\delta'' - 3\delta' + 2\delta)^{-1} = \begin{cases} (e^{2x} - e^x)H & \text{dans } \mathcal{D}'_+, \\ (e^{2x} - e^x)H + C_1 e^x + C_2 e^{2x}, C_1, C_2 \in \mathbb{R} & \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \end{cases}$$

▷ Soit $T = H + \delta''$ et soit $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ un inverse de convolution de T donc $T * S = H * S + S'' = \delta$.

Comme $U = H * S$ est une primitive de S alors l'équation précédente s'écrit

$$U + U^{(3)} = U * (\delta + \delta^{(3)}) = \delta,$$

de sorte que U est un inverse de $\delta + \delta^{(3)}$. On détermine comme dans les exemples précédents les inverses de $\delta + \delta^{(3)}$. La solution générale de l'équation différentielle $y^{(3)} + y = 0$ est

$$y_h = C_1 e^{-x} + e^{\frac{x}{2}} \left(C_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right), \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

La solution particulière y_p qui vérifie les conditions

$$y_p(0) = y'_p(0) = 0, \quad y''_p(0) = 1,$$

est obtenue pour $C_1 = \frac{1}{3}$, $C_2 = -\frac{1}{3}$ et $C_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, c'est-à-dire

$$y_p = \frac{1}{3} \left(e^{-x} + e^{\frac{x}{2}} \left(-\cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right) \right).$$

Ainsi

$$(\delta + \delta^{(3)})^{-1} = \begin{cases} y_p H & \text{dans } \mathcal{D}'_+, \\ y_p H + y_h, \quad C_i \in \mathbb{R} & \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \end{cases}$$

Comme $y_p(0) = 0$ alors $S = (y_p H)' = y'_p H$ est l'unique inverse de T dans $\mathcal{D}'_+$ et $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ car $y'_h * H$ n'est pas définie.

Solution 3.20. 1) Soit $T = (\sin x) H$, alors

$$T' = (\sin x)' H + (\sin x) H' = (\cos x) H + (\sin x) \delta = (\cos x) H + (\sin 0) \delta = (\cos x) H.$$

De même

$$T'' = -(\sin x) H + (\cos 0) \delta = -(\sin x) H + \delta = -T + \delta.$$

Ainsi $T \in \mathcal{D}'_+$ est la solution de l'équation différentielle $T'' + T = \delta$: on dit que T est la solution fondamentale de l'opérateur $L(u) = u'' + u$ dans $\mathcal{D}'_+$.

On a donc

$$T * (\delta'' + \delta) = \delta,$$

ce qui signifie que

$$T^{-1} = \delta'' + \delta \quad \text{dans } \mathcal{D}'_+.$$

2) $\triangleright$ Soit $S = (\cos x) H$ alors $S' = (-\sin x) H + \delta$ et $S'' = (-\cos x) H + \delta'$, donc

$$S'' + S = \delta' = S * (\delta'' + \delta).$$

Par conséquent

$$S * (\delta'' + \delta) * (\delta')^{-1} = \delta,$$

ce qui entraîne

$$S^{-1} = (\delta'' + \delta) * (\delta')^{-1} = (\delta'' + \delta) * H = \delta' + H \quad \text{dans } \mathcal{D}'_+.$$

$\triangleright$ Soit $U = e^{-x} H$, alors $U' = -e^{-x} H + \delta$ d'où $U' + U = \delta = U * (\delta' + \delta)$. Par conséquent

$$U^{-1} = \delta' + \delta \quad \text{dans } \mathcal{D}'_+.$$

$\triangleright$ Soit $V = e^x H + \delta$ alors $V' = e^x H + \delta + \delta'$ donc $V' - V = \delta'$. Ainsi

$$V^{-1} = (\delta' - \delta) * (\delta')^{-1} = (\delta' - \delta) * H = \delta - H \quad \text{dans } \mathcal{D}'_+.$$

Solution 3.21. $\triangleright$ L'équation $T' - T = \delta$ signifie que T est un inverse de convolution de $(\delta' - \delta)$.

Par conséquent

$$T = \begin{cases} e^x H & \text{dans } \mathcal{D}'_+, \\ e^x H + C e^x, \quad C \in \mathbb{R} & \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \end{cases}$$

$\triangleright$ L'équation $T'' - 3T' + 2T = \delta' + \delta$ s'écrit aussi $T * (\delta'' - 3\delta' + 2\delta) = \delta' + \delta$. Par conséquent les solutions de l'équation sont

$$T = (\delta'' - 3\delta' + 2\delta)^{-1} * (\delta' + \delta).$$

Comme (voir l'exercice 3.19)

$$(\delta'' - 3\delta' + 2\delta)^{-1} = (e^{2x} - e^x) H \quad \text{dans } \mathcal{D}'_+,$$

alors on obtient

$$\begin{aligned} T &= (e^{2x} - e^x) H * (\delta' + \delta) = (e^{2x} - e^x)' H + (e^{2x} - e^x) H \\ &= (3e^{2x} - 2e^x) H \quad \text{dans } \mathcal{D}'_+. \end{aligned}$$

En appliquant le principe de superposition des solutions, on voit que les solutions dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ sont obtenues en additionnant la solution trouvée dans $\mathcal{D}'_+$ et la solution de l'équation différentielle homogène. On a donc

$$T = (3e^{2x} - 2e^x) H + C_1 e^x + C_2 e^{2x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

Solution 3.22. $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, donc dans $\mathcal{D}'_+$

$$\begin{aligned} F' &= f' H + f \delta = f' H + f(0) \delta = f' H, \\ F'' &= (f' H)' = f'' H + f' \delta = f'' H + f'(0) \delta = f'' H + \delta, \\ F^{(3)} &= (f'' H + \delta)' = f^{(3)} H + f''(0) \delta + \delta' = f^{(3)} H + 2\delta + \delta'. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$F^{(3)} - 4F'' + 5F' - 2F = (f^{(3)} - 4f'' + 5f' - 2f) H + \delta' - 2\delta = e^{2x} H + \delta' - 2\delta.$$

Autrement dit

$$F * (\delta^{(3)} - 4\delta'' + 5\delta' - 2\delta) = e^{2x} H + \delta' - 2\delta,$$

et donc

$$F = (\delta^{(3)} - 4\delta'' + 5\delta' - 2\delta)^{-1} * (e^{2x} H + \delta' - 2\delta) \quad \text{dans } \mathcal{D}'_+.$$

Comme $r^3 - 4r^2 + 5r - 2 = (r - 1)^2(r - 2)$ alors dans $\mathcal{D}'_+$

$$(\delta^{(3)} - 4\delta'' + 5\delta' - 2\delta)^{-1} = (xe^x H) * (e^{2x} H),$$

d'où

$$\begin{aligned} F &= (xe^x H) * (e^{2x} H) * (e^{2x} H + (e^{2x} H)^{-1}) \\ &= (xe^x H) * (xe^{2x} H) + xe^x H \\ &= H(e^{2x}(x - 2) + 2e^x(x + 1)). \end{aligned}$$

Solution 3.23. $\triangleright$ Comme pour $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{D}'_+$

$$\int_0^x (x-y) e^{x-y} f(y) dy = (xe^x H) * f,$$

alors l'équation donnée s'écrit

$$(xe^x H) * f = g.$$

Par conséquent

$$f = (xe^x H)^{-1} * g \text{ dans } \mathcal{D}'_+.$$

Sachant que $xe^x H = e^x H * e^x H$, on obtient

$$(xe^x H)^{-1} = (e^x H * e^x H)^{-1} = (e^x H)^{-1} * (e^x H)^{-1} = (\delta' - \delta) * (\delta' - \delta) = \delta'' - 2\delta' + \delta,$$

d'où on déduit que

$$f = (\delta'' - 2\delta' + \delta) * g = g'' - 2g' + g \text{ dans } \mathcal{D}'_+.$$

$\triangleright$ Dans $\mathcal{D}'_+$

$$\int_0^x \sin y f(x-y) dy = g(x) \Leftrightarrow (\sin x H) * f = g,$$

donc (voir l'exercice 3.20)

$$f = (\sin x H)^{-1} * g = (\delta'' + \delta) * g = g'' + g.$$

$\triangleright$ De la même manière, l'équation

$$f(x) + \int_0^x \sin y f(x-y) dy = g(x)$$

est équivalente à l'équation de convolution dans $\mathcal{D}'_+$

$$f + f * (\sin x H) = f * (\delta + \sin x H) = g,$$

d'où

$$f = (\delta + \sin x H)^{-1} * g.$$

Posons $T = \delta + \sin x H$ alors $T'' + T = \delta'' + 2\delta = T * (\delta'' + \delta)$. Par conséquent (voir l'exercice 3.19)

$$\begin{aligned} T^{-1} &= (\delta'' + 2\delta)^{-1} * (\delta'' + \delta) = \frac{\sin(\sqrt{2}x)}{\sqrt{2}} H * (\delta'' + \delta) \\ &= \left(\frac{\sin(\sqrt{2}x)}{\sqrt{2}} H \right)'' + \frac{\sin(\sqrt{2}x)}{\sqrt{2}} H \\ &= -\frac{\sin(\sqrt{2}x)}{\sqrt{2}} H + \delta, \end{aligned}$$

et on conclut que

$$f = g - \left(\frac{\sin(\sqrt{2}x)}{\sqrt{2}} H \right) * g.$$

Remarque : Dans les deux premiers cas, des hypothèses supplémentaires sur g sont nécessaires pour conclure que la solution f est dans $L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

Solution 3.24. Nous allons appliquer la formule des sauts pour déterminer les dérivées premières $\frac{\partial f}{\partial t}$ et $\frac{\partial f}{\partial x}$. Le bord de D est formé de deux demi-droites Γ_1 et Γ_2 définies par

$$\Gamma_1 = \{(t, x) \in \mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{R}^*_+; t = x\}, \quad \Gamma_2 = \{(t, x) \in \mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{R}^*_+; t = -x\},$$

et les normales extérieures unitaires correspondantes sont respectivement

$$\nu_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1) \quad \text{et} \quad \nu_2 = \frac{-1}{\sqrt{2}}(1, 1).$$

Comme $[f]_{\Gamma_1} = [f]_{\Gamma_2} = -1$ ($[f]_{\Gamma_i}$ désigne le saut de la fonction f à travers la courbe Γ_i) alors dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\delta_{\Gamma_1} + \delta_{\Gamma_2}) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\delta_{\Gamma_1} + \delta_{\Gamma_2}).$$

Ainsi pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \varphi \right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \langle \delta_{\Gamma_1} + \delta_{\Gamma_2}, \varphi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\int_{\Gamma_1} \varphi(t, x) dl + \int_{\Gamma_2} \varphi(t, x) dl \right) \\ &= \int_0^{+\infty} \varphi(x, x) dx + \int_{-\infty}^0 \varphi(-x, x) dx. \end{aligned}$$

De même, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \varphi \right\rangle = - \int_0^{+\infty} \varphi(x, x) dx + \int_{-\infty}^0 \varphi(-x, x) dx.$$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, on écrit

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \varphi \right\rangle &= - \left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\rangle \\ &= \int_{-\infty}^0 \left(- \frac{\partial \varphi}{\partial t}(-x, x) + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(-x, x) \right) dx \\ &\quad - \int_0^{+\infty} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, x) + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, x) \right) dx \\ &= \int_{-\infty}^0 \frac{d}{dx} (\varphi(-x, x)) dx - \int_0^{+\infty} \frac{d}{dx} (\varphi(x, x)) dx \\ &= 2\varphi(0, 0) = 2\langle \delta_{(0,0)}, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) = \delta \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2),$$

donc $\frac{1}{2}f$ est une solution fondamentale de l'opérateur des ondes $\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

Solution 3.25. La convolution $T * P$ est bien définie et de plus $T * P \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Par conséquent $T * P$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à n si et seulement si, sa dérivée d'ordre $n+1$ est nulle. Or

$$(T * P)^{(n+1)} = T * P^{(n+1)} = T * 0 = 0,$$

d'où le résultat.

Solution 3.26. L'intégrale $\int_S \alpha(y) f(x-y) dS(y)$ représente la convolution de la distribution simple couche $\alpha \delta_S$ (à support compact) par la fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$ et on sait qu'alors $(\alpha \delta_S) * f$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^N$.

Soit $f(x) = |x|^2$, $x \in \mathbb{R}^N$, on a

$$\begin{aligned} \delta_S * f(x) &= \int_S |x-y|^2 dS(y) = \int_S (|x|^2 - 2x \cdot y + |y|^2) dS(y) \\ &= (|x|^2 + 1) \text{mes}(S) - 2x \cdot \int_S y dS(y). \end{aligned}$$

Comme la normale unitaire extérieure ν à S en tout point coïncide avec le rayon vecteur, c'est-à-dire $\nu(y) = y$ pour tout $y \in S$ alors en appliquant la formule de la divergence, on voit que $\int_S y dS(y) = 0$.

Par conséquent

$$\delta_S * |x|^2 = \text{mes}(S) (|x|^2 + 1).$$

CHAPITRE

4

LA TRANSFORMATION DE FOURIER

Espace de Schwartz $\mathcal{S}$, les distributions tempérées, la transformation de Fourier des fonctions et des distributions, séries de Fourier des distributions périodiques, la convolution, application à la résolution des EDP.

4.1 Rappel de cours

4.1.1 Les distributions tempérées

- Espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$

Définition 4.1. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ noté aussi $\mathcal{S}$ est l'espace des fonctions indéfiniment différentiables $\varphi : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), à décroissance rapide, c'est-à-dire pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^N$ $\lim_{|x| \rightarrow \infty} x^\alpha \partial^\beta \varphi(x) = 0$ ou encore $x^\alpha \partial^\beta \varphi$ est bornée sur $\mathbb{R}^N$, ou de manière équivalente la fonction $(1 + |x|^2)^k \partial^\beta \varphi$ est bornée sur $\mathbb{R}^N$ pour tous $k \in \mathbb{N}$ et $\beta \in \mathbb{N}^N$.

On définit la convergence dans $\mathcal{S}$ comme suit

Définition 4.2 (Convergence dans $\mathcal{S}$). Soit $(\varphi_n)_n \subset \mathcal{S}$, on dit que la suite est convergente vers φ

dans $\mathcal{S}$ si pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^N$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x^\alpha \partial^\beta (\varphi_n - \varphi)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} = 0,$$

ou de manière équivalente si pour tous $k \in \mathbb{N}$ et $\beta \in \mathbb{N}^N$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(1 + |x|^2)^k \partial^\beta (\varphi_n - \varphi)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} = 0.$$

Il s'ensuit que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$, ces inclusions étant topologiques et denses, de même que les inclusions $\mathcal{S} \subset L^p(\mathbb{R}^N)$, pour tout $p \in [1, \infty[$ mais $\mathcal{S}$ n'est pas dense dans $L^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Noter que $\mathcal{S}$ est stable par dérivation mais pas par multiplication par toutes les fonctions $\mathcal{C}^\infty$. Les multiplicateurs de $\mathcal{S}$ sont les fonctions définies ci-dessous

Définition 4.3 (Multiplicateurs de $\mathcal{S}$: fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à croissance lente). Une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$ est à croissance lente si pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^N$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que la fonction $(1 + |x|^2)^{-k} \partial^\alpha f$ est bornée sur $\mathbb{R}^N$. L'ensemble de toutes ces fonctions est noté $\mathcal{O}_M(\mathbb{R}^N)$.

$\mathcal{O}_M(\mathbb{R}^N)$ contient $\mathcal{S}$ et toutes les fonctions polynomiales.

• Distributions tempérées

Définition 4.4. Une distribution tempérée est une forme linéaire et continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. L'ensemble de toutes les distributions tempérées est le dual de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ noté $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ (ou plus simplement $\mathcal{S}'$).

$\mathcal{S}'$ est identifié à un sous-espace de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ grâce à l'application injective

$$L \in \mathcal{S}' \mapsto L|_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N).$$

Caractérisation : Une forme linéaire sur $\mathcal{S}$ est continue si et seulement si, il existe une constante positive C et un entier naturel m tels que

$$|\langle L, \varphi \rangle| \leq C \max_{|\alpha| \leq m} \|(1 + |x|^2)^m \partial^\alpha \varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}.$$

Par conséquent une distribution tempérée est d'ordre fini.

Propriétés : 1) $\mathcal{S}'$ est stable par dérivation et par multiplication par les fonctions de $\mathcal{O}_M(\mathbb{R}^N)$ et

$$\langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle, \quad \langle fT, \varphi \rangle = \langle T, f\varphi \rangle,$$

pour tous $T \in \mathcal{S}'$, $f \in \mathcal{O}_M$, $\alpha \in \mathbb{N}^N$ et $\varphi \in \mathcal{S}$.

2) $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{S}'$, de même que $L^p(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{S}'$, pour tout $p \in [1, +\infty]$.

3) Si une fonction $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ est à croissance lente, c'est-à-dire que $(1 + |x|^2)^{-k} f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ pour un entier $k \in \mathbb{N}$, alors elle définit une distribution tempérée.

Ainsi $\text{Log } |x| \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ puis par dérivation $\forall p \frac{1}{x}$ et toutes les parties finies $Pf \frac{1}{x^n}$ sont dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

La convergence dans $\mathcal{S}'$ est définie comme suit

Définition 4.5 (Convergence dans $\mathcal{S}'$). Soit $(T_n)_n \subset \mathcal{S}'$, $(T_n)_n$ converge vers T dans $\mathcal{S}'$ si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle T_n, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}.$$

Ainsi, on obtient les inclusions topologiques et denses suivantes : $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$.

4.1.2 Transformation de Fourier (T.F.) des fonctions

• T.F. dans L^1

Définition 4.6. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$. On appelle T.F. de f la fonction notée $\mathcal{F}(f)$ ou $\hat{f}$ définie sur $\mathbb{R}^N$ par

$$\hat{f}(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x) e^{-ix \cdot \xi} dx.$$

On appelle **T.F. conjuguée** de f , la fonction qu'on note $\overline{\mathcal{F}}(f)$ définie pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$ par :

$$\overline{\mathcal{F}}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x) e^{ix \cdot \xi} dx.$$

Les transformations $\mathcal{F}$ et $\overline{\mathcal{F}}$ sont linéaires et sont liées par les relations suivantes

$$\overline{\mathcal{F}}(f) = \mathcal{F}\left(\overset{\vee}{f}\right) = \overset{\vee}{\mathcal{F}(f)}.$$

Par conséquent, les deux transformations ont des propriétés similaires.

Exemple : T.F. de la gaussienne : Soit $\alpha > 0$, la T.F. de $G_\alpha(x) = e^{-\alpha|x|^2}$ est donnée par

$$\widehat{G_\alpha}(\xi) = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{\frac{N}{2}} e^{-\frac{|\xi|^2}{4\alpha}} = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{\frac{N}{2}} G_{\frac{1}{4\alpha}}(\xi).$$

Pour le calcul, on considère le cas $N = 1$ et on vérifie que

$$(\widehat{G_\alpha})' = -\frac{\xi}{2\alpha} \widehat{G_\alpha}, \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad \widehat{G_\alpha}(0) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}},$$

d'où on déduit la valeur de $\widehat{G_\alpha}$ en dimension 1, puis en dimension quelconque, en utilisant le théorème de Fubini.

Quelques propriétés : Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ alors

- i) $\hat{f}$ est continue et uniformément bornée sur $\mathbb{R}^N$ et on a $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$. De plus $\lim_{|\xi| \rightarrow +\infty} \hat{f}(\xi) = 0$,
- ii) $\mathcal{F}(\Pi_\lambda f) = |\lambda|^N \Pi_{\lambda^{-1}} \mathcal{F}(f)$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$.
- iii) $\mathcal{F}(\tau_a f) = e^{-ia \cdot \xi} \mathcal{F}(f)$ et $\mathcal{F}(e^{ia \cdot x} f) = \tau_a(\mathcal{F}(f))$, $a \in \mathbb{R}^N$,
- iv) Si $\partial^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $\alpha \in \mathbb{N}^N$, alors $\mathcal{F}(\partial^\alpha f) = (i\xi)^\alpha \mathcal{F}(f)$,
- v) Si $x^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, alors $\partial^\alpha \hat{f}$ existe et est continue sur $\mathbb{R}^N$ et on a $\partial^\alpha \hat{f} = (-i)^{|\alpha|} \mathcal{F}(x^\alpha f)$,
- vi) Si $g \in L^1(\mathbb{R}^N)$ alors $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f) \mathcal{F}(g)$,
- vii) Si $g \in L^1(\mathbb{R}^N)$ alors $\int_{\mathbb{R}^N} f(u) \hat{g}(u) du = \int_{\mathbb{R}^N} \hat{f}(v) g(v) dv$ (**formule de transposition**),
- viii) Si $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^N)$ alors $\overline{\mathcal{F}} \circ \mathcal{F}(f) = \mathcal{F} \circ \overline{\mathcal{F}}(f) = (2\pi)^N f$ p.p. dans $\mathbb{R}^N$ (**formule d'inversion dans L^1**). On en déduit que $\mathcal{F} \circ \mathcal{F}(f) = (2\pi)^N \hat{\hat{f}}$ et $\mathcal{F}$ est injective sur $L^1(\mathbb{R}^N)$.

• **T.F. dans $\mathcal{S}$ et dans L^2**

Comme $\mathcal{S} \subset L^1(\mathbb{R}^N)$, la T.F. est bien définie sur $\mathcal{S}$ et on montre que

Théorème 4.1 (T.F. sur $\mathcal{S}$). L'opérateur $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ est un isomorphisme, d'inverse $\mathcal{F}^{-1} = (2\pi)^{-N} \overline{\mathcal{F}}$. De plus, la convolution est stable dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ avec

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f) \mathcal{F}(g), \quad \mathcal{F}(fg) = (2\pi)^{-N} \mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g), \quad \forall f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$$

On donne également la **formule de Parseval** dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$:

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x) \overline{g(x)} dx = (2\pi)^{-N} \int_{\mathbb{R}^N} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)} d\xi, \quad \forall f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N),$$

d'où l'on déduit la **formule de Plancherel** :

$$\|f\|_2 = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \|\hat{f}\|_2, \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N).$$

Ce résultat permet d'étendre la définition de la T.F. à L^2 , en utilisant la densité de $\mathcal{S}$ dans L^2 .

Théorème et Définition 4.1. Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ et soit $(f_n)_n \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ telle que $(f_n)_n$ converge vers f dans $L^2(\mathbb{R}^N)$. Alors la suite $(\mathcal{F}(f_n))_n$ converge dans $L^2(\mathbb{R}^N)$. Sa limite, indépendante de la suite $(f_n)_n$ choisie, est appelée T. F. de f et est notée $\mathcal{F}(f)$ ou $\hat{f}$. De plus, si $f \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N)$, alors sa T.F. dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ coïncide avec sa T.F. dans $L^1(\mathbb{R}^N)$.

De plus, on a

Théorème 4.2. L'opérateur $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^N) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^N)$ est un isomorphisme d'inverse

$$\mathcal{F}^{-1} = (2\pi)^{-N} \overline{\mathcal{F}},$$

et les formules de Parseval et de Plancherel sont vraies pour des fonctions de $L^2(\mathbb{R}^N)$.

4.1.3 Transformation de Fourier des distributions

En accord avec la formule de transposition, on pose

Définition 4.7. Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, on appelle T.F. de T , la distribution tempérée notée $\mathcal{F}(T)$ ou $\widehat{T}$ définie par

$$\langle \mathcal{F}(T), \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}(\varphi) \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N).$$

$\overline{\mathcal{F}}$ est définie de manière similaire.

On vérifie alors que si $f \in L^1(\mathbb{R}^N) \cup L^2(\mathbb{R}^N)$, alors $\mathcal{F}(T_f) = T_{\mathcal{F}(f)}$, de sorte que la T.F. des distributions généralise celle des fonctions.

Exemple : $\mathcal{F}(\delta) = 1 : \langle \mathcal{F}(\delta), \varphi \rangle = \langle \delta, \mathcal{F}(\varphi) \rangle = \widehat{\varphi}(0) = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N).$

Comme pour les fonctions, nous avons les propriétés suivantes

Quelques propriétés : Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ alors

- i) $\mathcal{F}(\Pi_\lambda T) = |\lambda|^N \Pi_{\lambda^{-1}} \mathcal{F}(T), \quad \lambda \in \mathbb{R}^*,$
- ii) $\mathcal{F}(\tau_a T) = e^{-ia \cdot \xi} \mathcal{F}(T)$ et $\mathcal{F}(e^{ia \cdot x} T) = \tau_a(\mathcal{F}(T)), \quad a \in \mathbb{R}^N,$
- iii) $\mathcal{F}(\partial^\alpha T) = (i\xi)^\alpha \mathcal{F}(T), \quad \alpha \in \mathbb{N}^N$ et $\partial^\alpha \widehat{T} = (-i)^{|\alpha|} \mathcal{F}(x^\alpha T),$
- iv) $\overline{\mathcal{F}} \circ \mathcal{F}(T) = \mathcal{F} \circ \overline{\mathcal{F}}(T) = (2\pi)^N T$ ou encore $\mathcal{F} \circ \mathcal{F}(T) = (2\pi)^N \overset{\vee}{T}.$

De plus

Théorème 4.3. L'opérateur $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ est un isomorphisme d'inverse

$$\mathcal{F}^{-1} = (2\pi)^{-N} \overline{\mathcal{F}}.$$

Exemples Comme $\mathcal{F}(\delta) = 1$, on déduit que

$$\mathcal{F}(\delta_a) = e^{-ia \cdot \xi}, \quad \mathcal{F}(e^{ia \cdot x}) = (2\pi)^N \delta_a, \quad \forall a \in \mathbb{R}^N,$$

$$\mathcal{F}(\partial^\alpha \delta) = (i\xi)^\alpha, \quad \mathcal{F}(x^\alpha) = (2\pi)^N \partial^\alpha \delta, \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^N.$$

4.1.4 T.F. des distributions et convolution

Théorème 4.4. Soient $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ et $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, alors $T * f, \mathcal{F}(fT) \in \mathcal{O}_M$ et on a

$$T * f(x) = \langle T, \tau_x f \rangle = \langle T(y), f(x - y) \rangle,$$

$$\mathcal{F}(T * f) = \mathcal{F}(T) \mathcal{F}(f) \quad \text{et} \quad \mathcal{F}(fT) = (2\pi)^{-N} \mathcal{F}(T) * \mathcal{F}(f) = \langle T(x), e^{-ix \cdot \xi} f(x) \rangle.$$

De plus, si $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$ et $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, alors $T * f \in \mathcal{S}$. En particulier si $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$, alors $\mathcal{F}(T) \in \mathcal{O}_M$ et

$$\mathcal{F}(T)(\xi) = \langle T(x), e^{-ix \cdot \xi} \rangle.$$

En fait, si $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$ alors $\mathcal{F}(T)$ est la restriction à $\mathbb{R}^N$ de la fonction holomorphe $z \in \mathbb{C}^N \mapsto \langle T(x), e^{-ix \cdot z} \rangle$. Il en résulte que $\mathcal{F}(T)$ n'est jamais à support compact, une fonction holomorphe ne possédant que des zéros isolés.

Théorème 4.5. Soient $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$ et $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, alors $T * S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ et

$$\mathcal{F}(T * S) = \mathcal{F}(T) \mathcal{F}(S).$$

4.1.5 Séries de Fourier des distributions périodiques

• Distributions périodiques

Définition 4.8. Une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est dite périodique de période $p > 0$ ou p -périodique si $\tau_p T = T$.

Exemple : Le peigne de Dirac de pas p : $\text{III}_p = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{np}$.

Noter que le peigne de Dirac est une distribution tempérée. Plus généralement, on vérifie qu'une série de la forme $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \delta_{np}$ est convergente dans $\mathcal{S}'$ si et seulement si, la suite numérique $(a_n)_n \subset \mathbb{C}$ est à croissance lente, c'est-à-dire :

$$\exists C > 0, m \in \mathbb{N}; |a_n| \leq C|n|^m, \forall n \in \mathbb{Z}^*.$$

Rappelons qu'une série de la forme $\sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n$ est convergente si les deux séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{m \geq 1} a_{-m}$ sont convergentes.

Définition 4.9 (p -partition de l'unité). Une p -partition de l'unité est une fonction $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \tau_{np} \theta = 1$ sur $\mathbb{R}$.

On montre alors que **toute distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, p -périodique est tempérée.** En effet T s'écrit $T = (\theta T) * \text{III}_p$, où θ est une p -partition de l'unité quelconque. Ainsi T est la convolution d'une distribution à support compact et d'une distribution tempérée, par conséquent T est tempérée.

• **T.F. et série de Fourier du peigne de Dirac**

La T. F. du peigne de Dirac $\text{III}_p = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{np}$ est donnée par

$$\mathcal{F}(\text{III}_p) = \omega \text{III}_\omega = \omega \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{n\omega}, \quad \omega = \frac{2\pi}{p}. \quad (4.1)$$

Le développement en série de Fourier du peigne de Dirac III_p s'écrit

$$\text{III}_p = \frac{1}{p} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{in\omega x}, \quad \omega = \frac{2\pi}{p}, \quad (4.2)$$

et est appelée la **formule de Poisson**. Elle s'obtient à partir de (4.1) en écrivant

$$\delta_{n\omega} = \mathcal{F}\left(\frac{1}{2\pi} e^{in\omega x}\right), \quad (4.3)$$

et en utilisant l'injectivité de la T.F. sur $\mathcal{S}'$. En testant la formule de Poisson par $\varphi \in \mathcal{S}$, on obtient pour $p = 2\pi$ la **formule sommatoire de Poisson**

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}(\varphi)(2\pi n). \quad (4.4)$$

• **T.F. et série de Fourier d'une distribution périodique**

Si T est une distribution p -périodique quelconque, on écrit $T = (\theta T) * \text{III}_p$ où θ est une p -partition de l'unité. On a $\theta T \in \mathcal{E}'$ et $\text{III}_p \in \mathcal{S}'$ donc

$$\mathcal{F}(T) = \mathcal{F}(\theta T) \mathcal{F}(\text{III}_p)$$

avec

$$\mathcal{F}(\theta T)(\xi) = \langle \theta T, e^{-ix\xi} \rangle = \langle T, \theta e^{-ix\xi} \rangle.$$

En utilisant (4.1), on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(T) &= \mathcal{F}(\theta T) \omega \text{III}_\omega = \omega \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}(\theta T) \delta_{n\omega} \\ &= \omega \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}(\theta T)(n\omega) \delta_{n\omega} =: \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n(T) \delta_{n\omega}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

On vérifie que l'expression de $\alpha_n(T) = \omega \mathcal{F}(\theta T)(n\omega)$ est indépendante du choix de θ . On utilise ensuite (4.3) pour écrire

$$\mathcal{F}(T) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n(T) \mathcal{F}\left(\frac{1}{2\pi} e^{in\omega x}\right) = \mathcal{F}\left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi} \alpha_n(T) e^{in\omega x}\right),$$

et on déduit le développement en série de Fourier de T

$$T = \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n(T) e^{in\omega x}, \quad C_n(T) = \frac{1}{2\pi} \alpha_n(T) = \frac{1}{p} \mathcal{F}(\theta T)(n\omega), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (4.6)$$

Réciproquement, connaissant le développement en série de Fourier (4.6) de T , on peut calculer sa $T.F.$ à partir de cette expression.

Noter que le développement en série de Fourier des distributions généralise celui des fonctions, voir à cet effet l'exercice 4.29. La somme de la série de Fourier d'une fonction représente toujours la fonction dans $\mathcal{S}'$. Les coefficients de la série de Fourier d'une distribution ne tendent pas toujours vers 0, comme dans le cas d'une fonction; néanmoins, ils sont à croissance lente.

Exemple : La fonction $f = x - E(x)$ (où $E(x)$ est la partie entière de x) est une fonction 1-périodique. Son développement en série de Fourier est (pour plus de détails, voir l'exercice 4.28)

$$f = \frac{1}{2} + \frac{i}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{n} e^{2i\pi nx} \quad \text{dans } \mathcal{S}'.$$

Par conséquent sa $T.F.$ s'écrit

$$\mathcal{F}(f) = \pi\delta + i \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{n} \delta_{2\pi n} \quad \text{dans } \mathcal{S}'.$$

Le développement en série de Fourier de f' est

$$f' = - \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} e^{2i\pi nx} \quad \text{dans } \mathcal{S}'.$$

Noter que $E' = \text{III}_1$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ donc $f' = 1 - \text{III}_1$, et on retrouve la formule de Poisson, à partir du développement en série de Fourier de f' .

4.2 Enoncé des exercices

Exercice 4.1. Les fonctions suivantes sont-elles dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$?

$$e^{-|x|}, \quad e^x, \quad e^{-x^2}, \quad \cos x, \quad \cos(e^{-x^2}), \quad e^{-x^2} \cos(e^{-x^2}), \quad \frac{1}{(1+x^2)^{100}}.$$

Exercice 4.2. 1. Montrer que la suite de fonctions $(\frac{1}{n}e^{-x^2})_n$ converge dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

2. Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et soit les suites de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\varphi_n(x) = e^{-n}\varphi(nx), \quad \psi_n(x) = e^{-n}\varphi\left(\frac{x}{n}\right).$$

Etudier la convergence des suites $(\varphi_n)_n$ et $(\psi_n)_n$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Exercice 4.3. Les fonctions suivantes définissent-elles des distributions tempérées sur $\mathbb{R}$?

$$e^{-|x|}, \quad e^{-x^2}, \quad e^{x^2}, \quad \cos x, \quad e^x, \quad \cos(e^x), \\ e^x \sin(e^x), \quad e^x |\sin(e^x)|, \quad \frac{1}{(1+x^2)^{100}}, \quad (1+x^2)^{100}.$$

Exercice 4.4. En utilisant la définition, montrer que les distributions suivantes sont tempérées

$$H, \quad Vp\frac{1}{x}, \quad Pf\frac{H}{x}.$$

Exercice 4.5. 1. Soit la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{k!}$. Montrer que $(f_n)_n \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, que $(f_n)_n$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vers une fonction f à déterminer mais ne converge pas dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

2. Montrer que les suites de fonctions suivantes convergent vers δ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$

$$f_n(x) = \frac{n}{2} 1_{[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]}(x), \quad g_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-(nx)^2}.$$

Exercice 4.6. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que si f est une fonction paire alors sa T.F. aussi et elle est donnée par

$$\hat{f}(\xi) = 2 \int_0^\infty f(x) \cos(\xi x) dx.$$

Qu'en est-il si f est impaire ?

Exercice 4.7. Soient f, g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f = e^{-x}H$ et $g = e^x \overset{\vee}{H}$.

1. Calculer les transformées de Fourier de f et g .

2. Déterminer la convolution $f * g$.
3. Déterminer la T. F. de $f * g$ de deux manières différentes.

Exercice 4.8. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f = 1_{[-1,1]}$.

1. Calculer la T.F. de f et vérifier que c'est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Est-elle dans $L^1(\mathbb{R})$? Est-elle dans $L^2(\mathbb{R})$?
2. Déterminer la convolution $f * f$ et sa T.F. Que donne la formule d'inversion à partir de cette T.F ? Déterminer l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \xi}{\xi^2} \cos(\xi x) d\xi, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Exercice 4.9. Soient $b > a$ et $\alpha > 0$. Montrer que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(1_{[a,b]})(\xi) &= 2 \exp\left(-i\xi \frac{a+b}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{b-a}{2}\xi\right)}{\xi}, \\ \mathcal{F}(e^{-\alpha|x|})(\xi) &= \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \xi^2}, \quad \mathcal{F}(e^{-\alpha x} H)(\xi) = \frac{1}{\alpha + i\xi}. \end{aligned}$$

Exercice 4.10. Soit f_α la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_\alpha(x) = e^{-\alpha x^2}$, $\alpha > 0$.

1. Rappeler la transformée de Fourier de f_α .
2. En utilisant la T.F., déterminer la convolution $f_\alpha * f_\beta$, pour $\alpha, \beta > 0$.

Exercice 4.11. 1. En utilisant la T.F. de la fonction $e^{-|x|}$, déterminez les valeurs des intégrales

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^m} dx, \quad m = 2, 3, 4.$$

2. Calculer d'une manière similaire les intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^m x}{x^m} dx$, $m = 2, 3, 4$.

Exercice 4.12. 1. Rappeler la T.F. de la fonction $f(x) = e^{-|x|}$ puis déterminer les T. F. des fonctions $\tau_a f$ et $\pi_\lambda f$ pour $a, \lambda \in \mathbb{R}^*$.

2. Trouver la T.F. de la fonction $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$ puis en déduire les T. F. des fonctions

$$\frac{1}{\lambda^2 + x^2}, \quad \frac{1}{1 + (x-a)^2}, \quad \frac{1}{1+x+x^2}, \quad \frac{x}{(1+x^2)^2}, \quad \lambda, a \in \mathbb{R}^*.$$

Exercice 4.13. Déterminer les T.F. des distributions tempérées suivantes

$$e^{iax} \ (a \in \mathbb{R}), \quad \cos x, \quad \frac{\sin(ax)}{x} \ (a > 0), \quad x \sin x, \quad \frac{x}{1+x^2}.$$

Exercice 4.14. Soit $T \in \mathcal{S}'$. Déterminer $\mathcal{F}(\overset{\vee}{T})$ en fonction de $\mathcal{F}(T)$ et déduire la parité de $\mathcal{F}(T)$ en fonction de celle de T . Déterminer alors $\mathcal{F}(H)$.

Exercice 4.15. Montrer que les distributions suivantes sont tempérées et déterminer leurs T.F.

$$Vp \frac{1}{x}, \quad Pf \frac{1}{x^2}, \quad \ln|x|, \quad Pf \frac{H}{x}.$$

Exercice 4.16. Calculer $\mathcal{F}(1_{[-n,n]})$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et en déduire $\mathcal{F}(1)$.

Exercice 4.17. 1. Déterminer $\mathcal{F}(\delta^{(k)})$, $k \in \mathbb{N}^*$.

2. En utilisant la T.F. montrer que les solutions de l'équation $x^n T = 0$ dans $\mathcal{S}'$ sont de la forme

$$T = \sum_{k=0}^{n-1} C_k \delta^{(k)}, \text{ où les } C_k \text{ sont des constantes arbitraires.}$$

Exercice 4.18. Pour $\varepsilon > 0$, on pose $H_\varepsilon(x) = e^{-\varepsilon x} H(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que ces fonctions définissent des distributions tempérées et calculer $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H_\varepsilon$ dans $\mathcal{S}'$.

2. En déduire que $\delta = \frac{1}{2i\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x - i\varepsilon} - \frac{1}{x + i\varepsilon} \right)$ dans $\mathcal{S}'$.

Exercice 4.19. Montrer que $|x|$ définit une distribution tempérée sur $\mathbb{R}$. En utilisant $|x|''$ montrer que $\mathcal{F}(|x|) = C_1 Pf \frac{1}{\xi^2} + C_2 \delta$ où C_1 et C_2 sont des constantes à déterminer.

Exercice 4.20. On rappelle que pour $\alpha > 0$, $\mathcal{F}(e^{-\alpha|x|^2}) = \frac{(\sqrt{\pi})^N}{(\sqrt{\alpha})^N} e^{-\frac{|\xi|^2}{4\alpha}}$, $\xi \in \mathbb{R}^N$.

1. En utilisant un argument de prolongement holomorphe, montrer que

$$\mathcal{F}(e^{-\gamma|x|^2}) = \frac{(\sqrt{\pi})^N}{(\sqrt{\gamma})^N} e^{-\frac{|\xi|^2}{4\gamma}}, \quad \forall \gamma \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} \gamma > 0,$$

$\sqrt{\gamma}$ étant la détermination principale de la racine carrée dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$.

2. On pose $\gamma_n = \alpha_n + i\beta$ où $(\alpha_n)_n \subset \mathbb{R}_+^*$ est une suite tendant vers 0 et $\beta \in \mathbb{R}^*$. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\gamma_n|x|^2} = e^{-i\beta|x|^2} \text{ dans } \mathcal{S}' \text{ et en déduire } \mathcal{F}(e^{-i\beta|x|^2}).$$

Exercice 4.21. Trouver une solution fondamentale de l'opérateur

$$L(T) = T^{(4)} - T'' + T.$$

Exercice 4.22. Soit $S, T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ telles que $S * T = 0$. Montrer qu'alors $S = 0$ ou bien $T = 0$. Le résultat est-il vrai si l'une des distributions n'est pas à support compact ?

Exercice 4.23. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $f \in L^2(\mathbb{R})$ et soit $T \in \mathcal{S}'$ telle que $T^{(4)} + \lambda^2 T = f$. Montrer qu'alors $T \in H^4(\mathbb{R})$ c'est-à-dire $T^{(k)} \in L^2(\mathbb{R})$, $0 \leq k \leq 4$.

Exercice 4.24. Soit $f, g \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Montrer que

$$\mathcal{F}(fg) = (2\pi)^{-N} \hat{f} * \hat{g} \quad \text{et} \quad f * g = (2\pi)^{-N} \overline{\mathcal{F}(\hat{f} \hat{g})},$$

puis en déduire $\mathcal{F}(f * g)$.

Exercice 4.25. Pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, on pose $\langle T, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, x) dx$.

1. Montrer que $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$.

2. Montrer que pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, $\langle \widehat{T}, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} I_{\varepsilon}(\varphi)$ avec $I_{\varepsilon}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\varepsilon \xi^2} \widehat{\varphi}(\xi, \xi) d\xi$.

3. Montrer que $I_{\varepsilon}(\varphi) = C \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-y^2} \varphi(x, 2\sqrt{\varepsilon}y - x) dx dy$ où $C > 0$ est une constante à déterminer puis en déduire $\widehat{T}$.

Exercice 4.26. Soit $(a_n)_n \subset \mathbb{C}$, montrer que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{inx} \in \mathcal{S}'$ si et seulement si, la suite $(a_n)_n$ est à croissance lente.

Exercice 4.27. 1. Soit $0 < a < 1$, en utilisant l'identité de Poisson, montrer que le développement en série de Fourier de la distribution $T = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\delta_{n+a} - \delta_{n-a})$ est

$$T = 4 \sum_{n \geq 1} \sin(2\pi n a) \sin(2\pi n x).$$

2. Déterminer le développement en série de Fourier de la distribution $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta'_n$.

Exercice 4.28. Déterminer le développement en série de Fourier de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - E(x)$ et en déduire sa T.F. Calculer f' dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ainsi que sa T.F.

Exercice 4.29. Soit f une fonction p -périodique, on note $f_p = f1_{[0,p[}$ et on suppose que $f_p \in L^2(\mathbb{R})$. Montrer que $f = f_p * \mathbb{I}_p$ puis que les coefficients de Fourier de f sont donnés par $C_n(f) = \frac{1}{p} \widehat{f_p}(n\omega)$, $\omega = \frac{2\pi}{p}$.

Exercice 4.30. 1. Soit f et g deux fonctions p -périodiques et localement intégrables sur $\mathbb{R}$. On pose $f \overset{p}{*} g(x) = \frac{1}{p} \int_0^p f(y)g(x-y) dy$.

(a) Montrer que $f \overset{p}{*} g$ est bien définie sur $\mathbb{R}$, p -périodique, localement intégrable sur $\mathbb{R}$ et de plus $f \overset{p}{*} g = g \overset{p}{*} f$. Calculer $e^{in\omega x} \overset{p}{*} e^{ik\omega x}$ pour $n, k \in \mathbb{Z}$ où $\omega = \frac{2\pi}{p}$.

(b) Soit θ une p -partition de l'unité, montrer que $f \overset{p}{*} g = \frac{1}{p} (\theta f) * g$.

2. Notons $\mathcal{D}'_p$ l'ensemble des distributions p -périodiques sur $\mathbb{R}$. Soit $S, T \in \mathcal{D}'_p$, on pose $S \overset{p}{*} T = \frac{1}{p} (\theta S) * T$.

(i) Montrer que $S \overset{p}{*} T$ est bien définie et p -périodique.

(ii) Montrer que la convolution $\overset{p}{*}$ est commutative et associative sur $\mathcal{D}'_p$.

(iii) Etablir la relation suivante entre les coefficients de Fourier des distributions $S, T \in \mathcal{D}'_p$ et $S \overset{p}{*} T$: $C_n(S \overset{p}{*} T) = C_n(S)C_n(T)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

- (iv) Calculer $\text{III}_p \overset{p}{*} T$ pour $T \in \mathcal{D}'_p$ et déduire l'élément unité pour la convolution $\overset{p}{*}$ des distributions p -périodiques. Calculer $\text{III}'_p \overset{p}{*} T$ pour $T \in \mathcal{D}'_p$, que peut-on en déduire ?
- (v) Etudier le problème d'existence et d'unicité de l'inverse pour $\overset{p}{*}$ dans $\mathcal{D}'_p$.
- (vi) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, déterminer les distributions p -périodiques solutions de l'équation

$$X \overset{p}{*} (\text{III}'_p - \lambda \text{III}_p) = \text{III}_p.$$

Exercice 4.31. Résoudre les problèmes suivants en utilisant la T.F., f et g étant des fonctions données dans $L^1(\mathbb{R})$

$$\partial_t u + C \partial_x u = 0, \quad (t, x) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \quad u(0, x) = f(x), x \in \mathbb{R}, \quad (C \in \mathbb{R}^*),$$

$$\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \quad u(x, 0) = f(x), \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} u(x, y) = 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\partial_t^2 u - C^2 \partial_x^2 u = 0, \quad (t, x) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \quad u(0, x) = f(x), \partial_t u(0, x) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}, (C > 0),$$

$$\partial_t u - C^2 \partial_x^2 u = 0, \quad (t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \quad u(0, x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (C > 0).$$

4.3 Solutions

Solution 4.1. $\triangleright$ La fonction $e^{-|x|}$ n'est pas dérivable en 0, donc $e^{-|x|} \notin \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

$\triangleright e^x \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ mais $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ donc $e^x \notin \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

$\triangleright e^{-x^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. En effet $e^{-x^2} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, et comme pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$(e^{-x^2})^{(k)} = P_k(x) e^{-x^2},$$

où P_k est un polynôme, sachant que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^l e^{-x^2} = 0, \quad \forall l \in \mathbb{N}$, alors on déduit que

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^l (e^{-x^2})^{(k)} = 0, \quad \forall k, l \in \mathbb{N}.$$

$\triangleright \cos x \notin \mathcal{S}(\mathbb{R})$ car $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \cos x$ n'existe pas.

$\triangleright$ De même $\cos(e^{-x^2}) \notin \mathcal{S}$ car $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \cos(e^{-x^2}) = 1 \neq 0$.

$\triangleright e^{-x^2} \cos(e^{-x^2}) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ car $e^{-x^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $g(x) = \cos(e^{-x^2}) \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R})$. En effet $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $|g(x)| \leq 1$. De plus, on vérifie que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la dérivée $g^{(k)}$ est une somme dont chaque terme est de la forme

$$P(x) e^{-x^2} \cos\left(e^{-x^2} + n \frac{\pi}{2}\right),$$

où P est un polynôme et $n \in \mathbb{N}$. Par conséquent $|g^{(k)}|$ est majorée par un polynôme en $|x|$.

$\triangleright \frac{1}{(1+x^2)^{100}} \notin \mathcal{S}(\mathbb{R})$ car $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^{201} \frac{1}{(1+x^2)^{100}} \neq 0$.

Solution 4.2. 1) Soit $f_n(x) = \frac{1}{n} e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$. $(f_n)_n \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$. soit $k, l \in \mathbb{N}$, comme $(e^{-x^2})^{(l)}$ est le produit d'un polynôme par e^{-x^2} alors la fonction $x^k (e^{-x^2})^{(l)}$ est bornée sur $\mathbb{R}$, d'où

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x^k f_n^{(l)}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = 0,$$

et on conclut que la suite $(f_n)_n$ converge dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ vers 0.

2) Supposons φ non nulle, car dans le cas contraire les deux suites sont nulles.

$(\varphi_n)_n \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\varphi_n^{(k)}(x) = n^k e^{-n} \varphi^{(k)}(nx), \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \geq 1.$$

On écrit pour tout $k, l \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$

$$|x^l \varphi_n^{(k)}(x)| = n^{k-l} e^{-n} |(nx)^l \varphi^{(k)}(nx)|,$$

on voit donc que pour tout $k, l \in \mathbb{N}$

$$\|x^l \varphi_n^{(k)}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq n^{k-l} e^{-n} \|y^l \varphi^{(k)}(y)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

On conclut que $(\varphi_n)_n$ converge vers 0 dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

On vérifie de la même manière que $(\psi_n)_n$ converge vers 0 dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Solution 4.3. Nous rappelons que les fonctions $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq p \leq \infty$, définissent des distributions tempérées, de même que les fonctions $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^N)$ à croissance lente c'est-à-dire pour lesquelles il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $(1 + |x|^2)^{-k} f \in L^1(\mathbb{R}^N)$.

▷ $e^{-|x|}$, e^{-x^2} , $\cos x \in L^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

▷ $e^{x^2} \in L_{loc}^1(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ mais e^{x^2} ne définit pas une distribution tempérée sur $\mathbb{R}$, car $e^{-x^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et

$$\int_{\mathbb{R}} e^{x^2} e^{-x^2} dx = +\infty.$$

▷ $\cos(e^x) \in L^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ et $e^x \sin(e^x) = -(\cos(e^x))' \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ car $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ est stable par dérivation.

▷ $e^x \in L_{loc}^1(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ mais cette distribution n'est pas tempérée : si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ est une fonction positive telle que $\varphi(x) = e^{-x}$ au voisinage de $+\infty$ (considérer par exemple $\varphi = \theta e^{-x}$ où $\theta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ est une fonction positive à support dans $[0, +\infty[$ et $\theta = 1$ sur un intervalle $]A, +\infty[$, $A > 0$), alors

$$\int_{\mathbb{R}} e^x \varphi(x) dx \geq \int_A^{+\infty} e^x \varphi(x) dx = \int_A^{+\infty} dx = +\infty.$$

▷ $|e^x \sin(e^x)| = e^x |\sin(e^x)| \notin \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. En effet en utilisant la fonction φ de l'exemple précédent, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}} e^x |\sin(e^x)| \varphi(x) dx \geq \int_A^{+\infty} |\sin(e^x)| dx = \int_{e^A}^{+\infty} \frac{|\sin(y)|}{y} dy = +\infty.$$

On a utilisé le changement de variable $y = e^x$.

▷ Les fonctions $\frac{1}{(1+x^2)^{100}}$, $(1+x^2)^{100}$ sont localement intégrables sur $\mathbb{R}$ à croissance lente, elles définissent donc des distributions tempérées.

Solution 4.4. $\triangleright$ Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on écrit

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |H(x)\varphi(x)| dx &= \int_0^{+\infty} (1+x^2) |\varphi(x)| \frac{dx}{1+x^2} \\ &\leq \|(1+x^2)\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx < \infty. \end{aligned}$$

On conclut que l'application $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \mapsto \int_{\mathbb{R}} H(x)\varphi(x) dx$ est bien définie. De plus elle est linéaire et d'après ce qui précède, elle est continue. Par conséquent $H \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

$\triangleright$ Considérons le cas de la distribution $Pf \frac{H}{x}$, on pourra traiter de manière similaire $Vp \frac{1}{x}$.

Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, pour tout $\varepsilon > 0$ petit, on écrit

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \int_{\varepsilon}^1 \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx + \varphi(0) \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} + \int_1^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx,$$

donc

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \varphi(0) \ln \varepsilon = \int_{\varepsilon}^1 \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx,$$

avec

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \left| \frac{\varphi(x)}{x} \right| dx &\leq \int_1^{+\infty} |\varphi(x)| dx \leq \int_1^{+\infty} |(1+x^2)\varphi(x)| \frac{dx}{1+x^2} \\ &\leq \|(1+x^2)\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R})}, \end{aligned} \tag{4.7}$$

$$\text{car } \int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} \leq \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = 1.$$

Considérons la fonction $\psi(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}$ si $x \neq 0$ et $\psi(0) = \varphi'(0)$. $\psi \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ donc $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \psi(x) dx = \int_0^1 \psi(x) dx$ et $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \varphi(0) \ln \varepsilon \right]$ existe et est finie, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ donc $Pf \frac{H}{x}$ est bien définie sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et de plus

$$\langle Pf \frac{H}{x}, \varphi \rangle = \int_0^1 \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}). \tag{4.8}$$

L'application $Pf \frac{H}{x}$ est linéaire sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, montrons qu'elle est continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, considérons la valeur de $\langle Pf \frac{H}{x}, \varphi \rangle$ donnée par l'expression (4.8). Pour $0 < x < 1$, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c_x \in]0, x[$ tel que $\varphi(x) - \varphi(0) = x\varphi'(c_x)$ donc en utilisant (4.7), on obtient

$$\begin{aligned} \left| \langle Pf \frac{H}{x}, \varphi \rangle \right| &\leq \int_0^1 |\varphi'(c_x)| dx + \int_1^{+\infty} \left| \frac{\varphi(x)}{x} \right| dx \\ &\leq \|\varphi'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + \|(1+x^2)\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \\ &\leq \max_{0 \leq k \leq 1} \|(1+x^2)\varphi^{(k)}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}, \end{aligned}$$

car $\|\varphi'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|(1+x^2)\varphi'\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$. On conclut que $Pf \frac{H}{x}$ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Par conséquent $Pf \frac{H}{x}$ définit une distribution tempérée sur $\mathbb{R}$.

Solution 4.5. 1) Pour chaque n , f_n est une fonction polynômiale donc à croissance lente, d'où $f_n \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Clairement pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{x^{2k}}{k!} = e^{x^2}.$$

De plus, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, comme pour tout n , $0 \leq f_n(x) \leq e^{x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, alors en utilisant le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on déduit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n, \varphi \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} e^{x^2} \varphi(x) dx = \langle e^{x^2}, \varphi \rangle,$$

donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = e^{x^2} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

Supposons maintenant que $(f_n)_n$ converge dans $\mathcal{S}'$, comme la convergence dans $\mathcal{S}'$ entraîne la convergence dans $\mathcal{D}'$, alors nécessairement

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = e^{x^2} \quad \text{dans } \mathcal{S}'(\mathbb{R}),$$

ce qui absurde puisque $e^{x^2} \notin \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ (voir l'exercice 4.3). Par conséquent $(f_n)_n$ ne converge pas dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

2) $\triangleright f_n = \frac{n}{2} 1_{[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]} \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\langle f_n, \varphi \rangle = \frac{n}{2} \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \varphi(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \varphi\left(\frac{y}{n}\right) dy.$$

Comme pour tout $y \in]-1, 1[$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi\left(\frac{y}{n}\right) = \varphi(0)$ et que $|\varphi\left(\frac{y}{n}\right)| \leq \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$ pour tout n et tout y alors d'après le théorème de convergence dominée

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n, \varphi \rangle = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle,$$

donc $(f_n)_n$ converge vers δ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

$\triangleright g_n = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-(nx)^2} \in L^1(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\langle g_n, \varphi \rangle = \frac{n}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(nx)^2} \varphi(x) dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} \varphi\left(\frac{y}{n}\right) dy,$$

et en utilisant encore une fois le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle g_n, \varphi \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} \varphi(0) dy = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle.$$

Ainsi $(g_n)_n$ converge vers δ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Solution 4.6. Supposons que f est paire et montrons que sa T.F. est paire. Soit $\xi \in \mathbb{R}$

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi} dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) \cos(\xi x) dx + i \int_{\mathbb{R}} f(x) \sin(\xi x) dx.$$

La parité des fonctions $\sin$ et $\cos$ implique que $\int_{\mathbb{R}} f(x) \sin(\xi x) dx = 0$ et

$$\widehat{f}(\xi) = \widehat{f}(-\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \cos(\xi x) dx = 2 \int_0^{+\infty} f(x) \cos(\xi x) dx.$$

De la même manière, si f est impaire alors sa T.F. est impaire et on a

$$\widehat{f}(\xi) = 2i \int_0^{+\infty} f(x) \sin(\xi x) dx.$$

Solution 4.7. 1) $f = e^{-x}H \in L^1(\mathbb{R})$ et $g = e^x \overset{\vee}{H} = \overset{\vee}{f} \in L^1(\mathbb{R})$ donc leurs T.F. existent et on a pour tout $\xi \in \mathbb{R}$

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x} H(x) e^{-ix\xi} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x(1+i\xi)} dx = \frac{-1}{1+i\xi} e^{-x(1+i\xi)} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{1+i\xi}.$$

De même, on trouve

$$\widehat{g}(\xi) = \frac{1}{1-i\xi}, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Ce résultat était prévisible puisque

$$\mathcal{F}(g) = \mathcal{F}(\overset{\vee}{f}) = \overset{\vee}{\mathcal{F}(f)}.$$

2) $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ donc $f * g$ existe et $f * g \in L^1(\mathbb{R})$ et on a (voir exercice 1.14)

$$f * g(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

3) On remarque que $e^{-|x|} = f + g$ donc

$$\mathcal{F}(f * g) = \frac{1}{2}(\widehat{f} + \widehat{g}) = \frac{1}{1 + \xi^2}.$$

On peut aussi écrire

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f) \mathcal{F}(g) = \frac{1}{1 + \xi^2}.$$

Solution 4.8. 1) $f \in L^1(\mathbb{R})$ donc

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi} dx = \int_{-1}^1 e^{-ix\xi} dx = 2 \frac{\sin \xi}{\xi}, \quad \xi \neq 0,$$

et

$$\mathcal{F}(f)(0) = \int_{-1}^1 dx = 2.$$

Clairement $\mathcal{F}(f)$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et on écrira simplement

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = 2 \frac{\sin \xi}{\xi}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

$\mathcal{F}(f) \notin L^1(\mathbb{R})$ mais $\mathcal{F}(f) \in L^2(\mathbb{R})$. En effet

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\sin \xi}{\xi} \right| d\xi \geq \int_1^\infty \left| \frac{\sin \xi}{\xi} \right| d\xi \geq \int_1^\infty \frac{\sin^2 \xi}{\xi} d\xi,$$

et

$$\int_1^\infty \frac{\sin^2 \xi}{\xi} d\xi = \frac{1}{2} \int_1^\infty \frac{1 - \cos(2\xi)}{\xi} d\xi.$$

Cette intégrale est divergente car l'intégrale $\int_1^\infty \frac{1}{\xi} d\xi$ est divergente et l'intégrale $\int_1^\infty \frac{\cos(2\xi)}{\xi} d\xi$ est convergente (d'après le critère de Dirichlet), d'où

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\sin \xi}{\xi} \right| d\xi = +\infty.$$

Considérons l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\sin \xi}{\xi} \right|^2 d\xi = 2 \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 \xi}{\xi^2} d\xi = 2 \int_0^1 \frac{\sin^2 \xi}{\xi^2} d\xi + 2 \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 \xi}{\xi^2} d\xi.$$

Clairement l'intégrale $\int_0^1 \frac{\sin^2 \xi}{\xi^2} d\xi < \infty$ (puisque $\frac{\sin^2 \xi}{\xi^2} \simeq 1$ au voisinage de 0) et

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 \xi}{\xi^2} d\xi \leq \int_1^{+\infty} \frac{d\xi}{\xi^2} < +\infty.$$

Par conséquent

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\sin \xi}{\xi} \right|^2 d\xi < +\infty.$$

2) Voir l'exercice 1.12 pour le calcul de la convolution : on trouve

$$f * f = (2 - |x|) 1_{[-2,2]}.$$

$f * f \in L^1(\mathbb{R})$ donc sa T.F. existe et

$$\mathcal{F}(f * f) = (\mathcal{F}(f))^2 = 4 \frac{\sin^2 \xi}{\xi^2}.$$

Ainsi $\mathcal{F}(f * f) \in L^1(\mathbb{R})$ et c'est une fonction paire, donc en utilisant la formule d'inversion dans $L^1(\mathbb{R})$, on déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$ (étant donné que les deux fonctions sont continues sur $\mathbb{R}$)

$$\mathcal{F} \circ \mathcal{F}(f * f)(x) = 2\pi(f * f)(x) = 2\pi(2 - |x|)1_{[-2,2]}(x).$$

Comme la fonction $\xi \mapsto \frac{\sin^2 \xi}{\xi^2}$ est paire alors

$$\mathcal{F}\left(\frac{\sin^2 \xi}{\xi^2}\right)(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2 \xi}{\xi^2} \cos(\xi x) d\xi = \frac{1}{4} \mathcal{F} \circ \mathcal{F}(f * f)(x).$$

Ainsi

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2 \xi}{\xi^2} \cos(\xi x) d\xi = \frac{\pi}{2} (2 - |x|) 1_{[-2,2]}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Solution 4.9. $\triangleright 1_{[a,b]} \in L^1(\mathbb{R})$ et

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(1_{[a,b]})(\xi) &= \int_a^b e^{-ix\xi} dx = \frac{e^{-ia\xi} - e^{-ib\xi}}{i\xi}, \quad \xi \neq 0 \\ &= e^{-i\frac{a+b}{2}\xi} \frac{e^{i\frac{b-a}{2}\xi} - e^{-i\frac{b-a}{2}\xi}}{i\xi} = 2e^{-i\frac{a+b}{2}\xi} \frac{\sin \frac{b-a}{2}\xi}{\xi}. \end{aligned}$$

$\triangleright$ Soit $f(x) = e^{-\alpha|x|}$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$.

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx = \frac{2}{\alpha} < +\infty$$

donc $f \in L^1(\mathbb{R})$. Par conséquent

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha|x|} e^{-ix\xi} dx = \int_{-\infty}^0 e^{x(\alpha-i\xi)} dx + \int_0^{\infty} e^{-x(\alpha+i\xi)} dx = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \xi^2}.$$

$\triangleright e^{-\alpha x} H \in L^1(\mathbb{R})$ et

$$\mathcal{F}(e^{-\alpha x} H)(\xi) = \int_0^{+\infty} e^{-x(\alpha+i\xi)} dx = \frac{1}{\alpha + i\xi}.$$

Solution 4.10. Soit la fonction $f_{\alpha}(x) = e^{-\alpha x^2}$, $x \in \mathbb{R}$ pour $\alpha > 0$.

1) Rappelons que $f_{\alpha} \in L^1(\mathbb{R})$ et

$$\mathcal{F}(f_{\alpha})(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} f_{\frac{1}{4\alpha}}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\xi^2}{4\alpha}}.$$

2) Soit $\alpha, \beta > 0$, $f_{\alpha} * f_{\beta} \in L^1(\mathbb{R})$ et on a

$$\mathcal{F}(f_{\alpha} * f_{\beta}) = \mathcal{F}(f_{\alpha}) \mathcal{F}(f_{\beta}) = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha\beta}} e^{-\frac{\xi^2}{4\alpha}} e^{-\frac{\xi^2}{4\beta}} = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha\beta}} e^{-\frac{\alpha+\beta}{4\alpha\beta}\xi^2} = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha\beta}} e^{-\frac{\xi^2}{4\gamma}},$$

où $\gamma = \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} > 0$. Par conséquent

$$\mathcal{F}(f_{\alpha} * f_{\beta}) = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha\beta}} \sqrt{\frac{\gamma}{\pi}} \mathcal{F}(f_{\gamma}) = \mathcal{F}\left(\sqrt{\frac{\pi}{\alpha+\beta}} f_{\gamma}\right).$$

Comme $\mathcal{F}$ est injective sur L^1 , on conclut que

$$f_\alpha * f_\beta = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha + \beta}} f_\gamma = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha + \beta}} e^{-\frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta} x^2}.$$

On retrouve ainsi le résultat de l'exercice 1.13.

Solution 4.11. 1) Soit $f(x) = e^{-|x|}$, $x \in \mathbb{R}$. On a vu dans l'exercice 4.9 que $f \in L^1(\mathbb{R})$ et

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \frac{2}{1 + \xi^2}.$$

◇ Soit $m = 2$. On a

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-2x} dx = 1,$$

donc $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $\|f\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1$. Par conséquent $\mathcal{F}(f) \in L^2(\mathbb{R})$ et d'après la formule de Plancherel

$$\|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = 2\pi \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = 2\pi.$$

Ainsi

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(1 + x^2)^2} = \frac{1}{4} \|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \frac{\pi}{2}.$$

◇ Soit $m = 3$. On pose

$$F = \frac{1}{1 + x^2} = \frac{1}{2} \mathcal{F}(f), \quad G = \frac{1}{(1 + x^2)^2} = \frac{1}{4} (\mathcal{F}(f))^2 = \frac{1}{4} \mathcal{F}(f * f) = \overline{G}.$$

On a alors

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(1 + x^2)^3} = \int_{\mathbb{R}} F(x) \overline{G}(x) dx = \frac{1}{8} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)(x) \overline{\mathcal{F}(f * f)}(x) dx,$$

et d'après la formule de Parseval

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(1 + x^2)^3} = \frac{\pi}{4} \int_{\mathbb{R}} f(x) f * f(x) dx.$$

Or, voir l'exercice 3.18

$$f * f(x) = e^{-|x|} * e^{-|x|} = (|x| + 1) e^{-|x|},$$

donc

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) f * f(x) dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-2x} (x + 1) dx = \frac{3}{2},$$

d'où

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(1 + x^2)^3} = \frac{3\pi}{8}.$$

◇ Soit $m = 4$. On applique la formule de Plancherel à la fonction $f * f \in L^2(\mathbb{R})$ avec $\|f * f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \frac{5}{2}$.

On a donc

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(1 + x^2)^4} = \frac{1}{16} \|\mathcal{F}(f * f)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \frac{\pi}{8} \|f * f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \frac{5\pi}{16}.$$

2) Nous utiliserons l'exercice 4.8 : $\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2} \mathcal{F}(g)$ où $g = 1_{[-1,1]}$. D'après l'identité de Plancherel

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{1}{4} \|\hat{g}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \frac{\pi}{2} \|g\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \pi.$$

En utilisant la formule de Parseval comme ci-dessus, sachant que $g * g = (2 - |x|) 1_{[-2,2]}$, on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x^3} dx = \frac{1}{8} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(g) \mathcal{F}(g * g)(x) dx = \frac{\pi}{4} \int_{\mathbb{R}} g(x) g * g(x) dx = \frac{3\pi}{4}.$$

Pour terminer, la formule de Plancherel appliquée à $g * g$ donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^4} dx = \frac{1}{16} \|\mathcal{F}(g * g)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \frac{\pi}{8} \|g * g\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \frac{2\pi}{3}.$$

Solution 4.12. 1) la T.F. de f (voir l'exercice 4.9) est donnée par $\mathcal{F}(f)(\xi) = \frac{2}{1 + \xi^2}$. Par conséquent pour $a, \lambda \in \mathbb{R}^*$, on a

$$\mathcal{F}(\tau_a f)(\xi) = e^{-ia\xi} \mathcal{F}(f)(\xi) = 2 \frac{e^{-ia\xi}}{1 + \xi^2},$$

$$\mathcal{F}(\Pi_\lambda f)(\xi) = |\lambda| \Pi_{\frac{1}{\lambda}} \mathcal{F}(f)(\xi) = |\lambda| \mathcal{F}(f)(\lambda\xi) = \frac{2|\lambda|}{1 + \lambda^2 \xi^2}.$$

2) Soit $g(x) = \frac{1}{1 + x^2}$, $x \in \mathbb{R}$. $g \in L^1(\mathbb{R})$ et $g = \frac{1}{2} \mathcal{F}(f)$ où $f(\xi) = e^{-|\xi|} \in L^1(\mathbb{R})$. En appliquant la formule d'inversion dans $L^1(\mathbb{R})$, on obtient

$$\mathcal{F}(g) = \frac{1}{2} \mathcal{F} \circ \mathcal{F}(f) = \frac{1}{2} (2\pi) \overset{\vee}{f} = \pi f,$$

car f est une fonction paire. Ainsi

$$\mathcal{F}(g)(\xi) = \mathcal{F}\left(\frac{1}{1 + x^2}\right)(\xi) = \pi e^{-|\xi|}.$$

▷ Déterminons $\mathcal{F}\left(\frac{1}{\lambda^2 + x^2}\right)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$. On écrit

$$\frac{1}{\lambda^2 + x^2} = \frac{1}{\lambda^2} \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{\lambda}\right)^2} = \frac{1}{\lambda^2} g\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda^2} \Pi_\lambda g(x).$$

Par conséquent

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{\lambda^2 + x^2}\right)(\xi) = \frac{1}{\lambda^2} \mathcal{F}(\Pi_\lambda g)(\xi) = \frac{|\lambda|}{\lambda^2} \Pi_{\frac{1}{\lambda}} \hat{g}(\xi) = \frac{1}{|\lambda|} \hat{g}(\lambda\xi) = \frac{\pi}{|\lambda|} e^{-|\lambda\xi|}.$$

▷ Soit $a \in \mathbb{R}^*$, $\frac{1}{1 + (x - a)^2} = \tau_a g(x)$ donc

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{1 + (x - a)^2}\right)(\xi) = e^{-ia\xi} \mathcal{F}(g)(\xi) = \pi e^{-|\xi| - ia\xi}.$$

▷ Déterminons $\mathcal{F}\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right)$. Comme

$$\frac{1}{1+x+x^2} = \frac{4}{3} \frac{1}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{4}{3} g\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{4}{3} \tau_{-\frac{1}{2}} \circ \Pi_{\frac{\sqrt{3}}{2}} g(x),$$

alors

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right) = \frac{4}{3} e^{i\frac{\xi}{2}} \frac{\sqrt{3}}{2} \hat{g}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\xi\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} e^{i\frac{\xi}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}|\xi|}.$$

▷ $\frac{x}{(1+x^2)^2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)' \in L^1(\mathbb{R})$ donc

$$\mathcal{F}\left(\frac{x}{(1+x^2)^2}\right)(\xi) = -\frac{1}{2}\mathcal{F}(g')(\xi) = -\frac{1}{2}i\xi\mathcal{F}(g)(\xi) = -i\frac{\pi}{2}\xi e^{-|\xi|}.$$

Solution 4.13. ▷ Soit $a \in \mathbb{R}$, $|e^{iax}| = 1$ donc $e^{iax} \in L^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ donc $\mathcal{F}(e^{iax})$ existe. En appliquant la formule

$$\mathcal{F}(e^{iax}T) = \tau_a\mathcal{F}(T), \quad T \in \mathcal{S}',$$

on obtient

$$\mathcal{F}(e^{iax}) = \tau_a\mathcal{F}(1) = \tau_a(2\pi\delta) = 2\pi\delta_a.$$

▷ $\cos x \in L^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ et en utilisant le calcul précédent, on obtient

$$\mathcal{F}(\cos x) = \mathcal{F}\left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right) = \frac{1}{2}(\mathcal{F}(e^{ix}) + \mathcal{F}(e^{-ix})) = \pi(\delta_1 + \delta_{-1}).$$

On peut calculer de la même manière $\mathcal{F}(\sin x)$ ou bien utiliser la T. F. de la dérivation

$$\mathcal{F}(\sin x) = \mathcal{F}((- \cos x)') = -i\xi\mathcal{F}(\cos x) = -i\pi\xi(\delta_1 + \delta_{-1}) = -i\pi(\delta_1 - \delta_{-1}).$$

On a utilisé l'égalité $f\delta_a = f(a)\delta_a$ pour $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$.

▷ Soit $a > 0$, $\frac{\sin(ax)}{x} \in L^p(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ avec $p = 2$ et $p = \infty$. Sachant que (voir l'exercice 4.9)

$$\frac{\sin(ax)}{x} = \frac{1}{2} \mathcal{F}(1_{[-a,a]}),$$

et

$$\mathcal{F} \circ \mathcal{F}(T) = 2\pi \overset{\vee}{T} = 2\pi T,$$

pour une distribution tempérée T paire, alors

$$\mathcal{F}\left(\frac{\sin(ax)}{x}\right) = \frac{1}{2} \mathcal{F} \circ \mathcal{F}(1_{[-a,a]}) = \pi 1_{[-a,a]}.$$

▷ $\sin x \in L^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ et $x \in \mathcal{O}_M$ donc $x \sin x \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. On utilise la formule de dérivation des T. F. des distributins tempérées $(\mathcal{F}(T))' = (-i)\mathcal{F}(xT)$ et on écrit

$$\mathcal{F}(x \sin x) = i(\mathcal{F}(\sin x))' = i(-i\pi(\delta_1 - \delta_{-1}))' = \pi(\delta_1' - \delta_{-1}').$$

▷ $\frac{x}{1+x^2} \in L^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ et (voir l'exercice 4.12)

$$\mathcal{F}\left(\frac{x}{1+x^2}\right) = i\left(\mathcal{F}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)\right)' = i\pi(e^{-|\xi|})'.$$

On utilise la formule des sauts pour calculer cette dérivée. La fonction $e^{-|\xi|}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^1$ par morceaux, donc sa dérivée dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ coïncide avec sa dérivée au sens classique. Par conséquent

$$\mathcal{F}\left(\frac{x}{1+x^2}\right)(\xi) = -i\pi \operatorname{sgn}(\xi) e^{-|\xi|}.$$

Solution 4.14. ▷ Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, $\overset{\vee}{T} = \Pi_{-1}T$ donc $\mathcal{F}(\overset{\vee}{T}) = \Pi_{-1}\mathcal{F}(T) = \mathcal{F}(\overset{\vee}{T})$.

Si T est paire alors $T = \overset{\vee}{T}$ donc

$$\mathcal{F}(\overset{\vee}{T}) = \mathcal{F}(T) = \mathcal{F}(\overset{\vee}{T}),$$

de sorte que $\mathcal{F}(T)$ est paire.

De même si T est impaire alors $\mathcal{F}(T)$ impaire.

▷ Nous allons déterminer $\mathcal{F}(H)$ sachant que $H \in L^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'$ et $H + \overset{\vee}{H} = 1$. On a donc

$$\mathcal{F}(1) = 2\pi\delta = \mathcal{F}(H) + \mathcal{F}(\overset{\vee}{H}).$$

D'autre part $H' = \delta$ donc

$$\mathcal{F}(\delta) = 1 = \mathcal{F}(H') = i\xi\mathcal{F}(H),$$

ou encore

$$\xi\mathcal{F}(H) = -i.$$

On déduit qu'il existe $C \in \mathbb{C}$ telle que (voir l'exercice 2.27)

$$\mathcal{F}(H) = -iVp \frac{1}{\xi} + C\delta.$$

Il reste à déterminer la constante C . Comme la distribution $Vp \frac{1}{\xi}$ est impaire et δ est paire, on obtient

$$\mathcal{F}(\overset{\vee}{H}) = iVp \frac{1}{\xi} + C\delta,$$

de sorte que

$$2\pi\delta = \mathcal{F}(H) + \mathcal{F}(\overset{\vee}{H}) = 2C\delta.$$

On déduit que $C = \pi$ et

$$\mathcal{F}(H) = -i Vp \frac{1}{\xi} + \pi\delta.$$

Solution 4.15. $\triangleright$ Sachant que $\mathcal{S}'$ est stable par dérivation et que $\ln|x| \in \mathcal{S}'$, on déduit que

$$Vp \frac{1}{x} = (\ln|x|)' \in \mathcal{S}'.$$

On peut aussi utiliser l'exercice 4.14 : $H \in \mathcal{S}'$ donc $\mathcal{F}(H) \in \mathcal{S}'$ d'où

$$Vp \frac{1}{\xi} = i\mathcal{F}(H) - i\pi\delta \in \mathcal{S}'.$$

Cette égalité permet d'écrire

$$\mathcal{F}\left(Vp \frac{1}{x}\right) = i\mathcal{F} \circ \mathcal{F}(H) - i\pi\mathcal{F}(\delta) = i2\pi\overset{\vee}{H} - i\pi = -i\pi \operatorname{sgn}(\xi).$$

On peut aussi procéder de la manière suivante. Sachant que $xVp \frac{1}{x} = 1$ alors

$$\mathcal{F}(1) = 2\pi\delta = \mathcal{F}\left(xVp \frac{1}{x}\right) = i\left(\mathcal{F}\left(Vp \frac{1}{x}\right)\right)'.$$

Par conséquent

$$\mathcal{F}\left(Vp \frac{1}{x}\right) = -i2\pi H + C,$$

où C est une constante à déterminer. $Vp \frac{1}{x}$ étant impaire, sa T.F. aussi, donc

$$-i2\pi \overset{\vee}{H} + C = i2\pi H - C,$$

ce qui entraîne que $2C = i2\pi (H + \overset{\vee}{H}) = i2\pi$, c'est-à-dire $C = i\pi$ et

$$\mathcal{F}\left(Vp \frac{1}{x}\right) = -i2\pi H + i\pi = -i\pi (2H - 1) = -i\pi \operatorname{sgn}(\xi).$$

$\triangleright Pf \frac{1}{x^2} = -\left(Vp \frac{1}{x}\right)' \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ et

$$\mathcal{F}\left(Pf \frac{1}{x^2}\right) = -\mathcal{F}\left(\left(Vp \frac{1}{x}\right)'\right) = -i\xi\mathcal{F}\left(Vp \frac{1}{\xi}\right) = -i\xi(-i\pi \operatorname{sgn}(\xi)),$$

d'où

$$\mathcal{F}\left(Pf \frac{1}{x^2}\right) = -\pi|\xi|.$$

▷ On sait que $\ln |x| \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ et de la relation $(\ln |x|)' = Vp \frac{1}{x}$ on déduit que

$$i\xi \mathcal{F}(\ln |x|) = \mathcal{F}(Vp \frac{1}{x}) = -i\pi \operatorname{sgn}(\xi),$$

c'est-à-dire

$$\xi \mathcal{F}(\ln |x|) = -\pi \operatorname{sgn}(\xi).$$

Par conséquent (voir l'exercice 2.27)

$$\mathcal{F}(\ln |x|) = -\pi Pf \frac{1}{|\xi|} + C\delta, \quad (4.9)$$

où C est une constante à déterminer, et on déduit que $Pf \frac{1}{|\xi|} \in \mathcal{S}'$. Nous allons déterminer C en calculant $\mathcal{F}(Pf \frac{1}{|\xi|})$. Nous rappelons que pour $\varphi \in \mathcal{S}$

$$\langle Pf \frac{1}{|x|}, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{|x|} dx + 2\varphi(0) \ln \varepsilon \right),$$

et on peut aussi l'écrire

$$\langle Pf \frac{1}{|x|}, \varphi \rangle = \int_0^1 \frac{\varphi(x) + \varphi(-x) - 2\varphi(0)}{x} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\varphi(x) + \varphi(-x)}{x} dx. \quad (4.10)$$

En effet

$$\int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{|x|} dx = \underbrace{\int_{1 \geq |x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{|x|} dx}_{I_1} + \underbrace{\int_{|x| > 1} \frac{\varphi(x)}{|x|} dx}_{I_2},$$

et

$$I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{\varphi(x) + \varphi(-x)}{x} dx.$$

De même

$$I_1 = \int_{\varepsilon}^1 \frac{\varphi(x) + \varphi(-x)}{x} dx = \int_{\varepsilon}^1 f(x) dx + 2\varphi(0) \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x} dx,$$

où

$$f(x) = \frac{\varphi(x) + \varphi(-x) - 2\varphi(0)}{x}.$$

On a donc

$$\int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{|x|} dx + 2\varphi(0) \ln \varepsilon = \int_{\varepsilon}^1 f(x) dx + \int_1^{+\infty} \frac{\varphi(x) + \varphi(-x)}{x} dx.$$

Comme f est continue sur $]0, 1]$ et admet un prolongement par continuité en 0, alors

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx,$$

ce qui prouve (4.10).

◇ Calculons maintenant $\mathcal{F}\left(Pf \frac{1}{|x|}\right)$: Soit $\varphi \in \mathcal{S}$, en utilisant (4.10), on écrit

$$\begin{aligned} \left\langle \mathcal{F}\left(Pf \frac{1}{|x|}\right), \varphi \right\rangle &= \left\langle Pf \frac{1}{|\xi|}, \widehat{\varphi} \right\rangle \\ &= \underbrace{\int_0^1 \frac{\widehat{\varphi}(\xi) + \widehat{\varphi}(-\xi) - 2\widehat{\varphi}(0)}{\xi} d\xi}_{J_1} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{\widehat{\varphi}(\xi) + \widehat{\varphi}(-\xi)}{\xi} d\xi}_{J_2}, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_0^1 \frac{1}{\xi} \left(\int_{\mathbb{R}} (e^{-it\xi} + e^{it\xi} - 2) \varphi(t) dt \right) d\xi = 2 \int_0^1 \frac{1}{\xi} \left(\int_{\mathbb{R}} (\cos(t\xi) - 1) \varphi(t) dt \right) d\xi, \\ J_2 &= \int_1^\infty \frac{1}{\xi} \left(\int_{\mathbb{R}} (e^{-it\xi} + e^{it\xi}) \varphi(t) dt \right) d\xi = 2 \int_1^\infty \frac{1}{\xi} \left(\int_{\mathbb{R}} \cos(t\xi) \varphi(t) dt \right) d\xi. \end{aligned}$$

En supposant qu'on peut intervertir l'ordre d'intégration dans les intégrales doubles, on obtient

$$\begin{aligned} \left\langle \mathcal{F}\left(Pf \frac{1}{|x|}\right), \varphi \right\rangle &= 2 \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^1 \frac{\cos(t\xi) - 1}{\xi} d\xi + \int_1^\infty \frac{\cos(t\xi)}{\xi} d\xi \right) \varphi(t) dt, \\ &= 2 \int_{\mathbb{R}} F(t) \varphi(t) dt \end{aligned}$$

où on a posé

$$F(t) = \int_0^1 \frac{\cos(t\xi) - 1}{\xi} d\xi + \int_1^\infty \frac{\cos(t\xi)}{\xi} d\xi, \quad t \in \mathbb{R}^*.$$

Notons que la fonction F est paire, nous allons déterminer son expression pour $t > 0$. A l'aide du changement de variable $y = t\xi$, on obtient

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_0^t \frac{\cos y - 1}{y} dy + \int_t^\infty \frac{\cos y}{y} dy \\ &= \int_0^1 \frac{\cos y - 1}{y} dy + \int_1^t \frac{\cos y - 1}{y} dy + \int_t^1 \frac{\cos y}{y} dy + \int_1^\infty \frac{\cos y}{y} dy \\ &= -\gamma - \int_1^t \frac{dy}{y} = -\gamma - \ln t, \end{aligned}$$

où γ est la constante d'Euler donnée, entre autres expressions, par

$$\gamma = \int_0^1 \frac{1 - \cos y}{y} dy - \int_1^\infty \frac{\cos y}{y} dy.$$

On a donc

$$F(t) = -\gamma - \ln |t|, \quad t \in \mathbb{R}^*,$$

et on conclut que

$$\mathcal{F}\left(Pf \frac{1}{|x|}\right) = 2F = -2(\gamma + \ln |\xi|).$$

On revient à l'égalité (4.9) et on écrit

$$\mathcal{F} \circ \mathcal{F}(\ln |x|) = -\pi \mathcal{F}\left(Pf \frac{1}{|\xi|}\right) + C,$$

c'est-à-dire

$$2\pi \ln |x| = 2\pi(\gamma + \ln |x|) + C.$$

Par conséquent $C = -2\pi\gamma$ et

$$\mathcal{F}(\ln |x|) = -\pi P f \frac{1}{|\xi|} - 2\pi\gamma\delta.$$

◇ Vérifions maintenant qu'on peut effectivement intervertir l'ordre d'intégration dans les intégrales doubles définissant J_1 et J_2 .

• Considérons d'abord J_1 et écrivons

$$J_1 = 2 \int_0^1 \left(\int_{\mathbb{R}} g(t, \xi) dt \right) d\xi, \quad \text{où } g(t, \xi) = \frac{\cos(t\xi) - 1}{\xi} \varphi(t).$$

Pour $(t, \xi) \in \mathbb{R} \times]0, 1[$, on a

$$|g(t, \xi)| = \frac{|\varphi(t)|}{\xi} |\cos(t\xi) - 1| = \frac{|\varphi(t)|}{\xi} \left| (-t\xi) \int_0^1 \sin(t\xi s) ds \right| \leq |t\varphi(t)|,$$

et comme la fonction $(t, \xi) \mapsto |t\varphi(t)|$ est dans $L^1(\mathbb{R} \times]0, 1[)$, on peut donc appliquer le théorème de Fubini dans l'intégrale J_1 .

• Maintenant, considérons J_2 et écrivons

$$J_2 = 2 \int_1^\infty \left(\int_{\mathbb{R}} h(t, \xi) dt \right) d\xi, \tag{4.11}$$

où $h(t, \xi) = \frac{\cos(t\xi)}{\xi} \varphi(t)$ et posons $D = \mathbb{R} \times]1, +\infty[$. $h \notin L^1(D)$ donc on ne peut pas appliquer le théorème de Fubini dans (4.11). En effet si on suppose que $h \in L^1(D)$ alors d'après le théorème de Fubini, pour presque tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $\xi \mapsto h(t, \xi)$ est dans $L^1(]1, +\infty[)$ et donc en particulier pour presque tout $t > 0$

$$\int_1^\infty \frac{|\cos(t\xi)|}{\xi} d\xi = \int_t^\infty \frac{|\cos y|}{y} dy < \infty,$$

ce qui est faux, cette dernière intégrale étant divergente.

Pour contourner cette difficulté, nous calculons l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} h(t, \xi) dt$ par parties. Pour $\xi \in]1, +\infty[$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} h(t, \xi) dt = \frac{1}{\xi} \int_{\mathbb{R}} \cos(t\xi) \varphi(t) dt = -\frac{1}{\xi^2} \int_{\mathbb{R}} \sin(t\xi) \varphi'(t) dt,$$

ce qui entraîne que

$$J_2 = -2 \int_1^\infty \left(\int_{\mathbb{R}} k(t, \xi) dt \right) d\xi, \tag{4.12}$$

où $k(t, \xi) = \frac{\sin(t\xi)}{\xi^2} \varphi'(t)$. Maintenant pour $(t, \xi) \in D$

$$|k(t, \xi)| \leq \frac{|\varphi'(t)|}{\xi^2} \in L^1(D),$$

donc $k \in L^1(D)$ et on peut appliquer le théorème de Fubini dans la nouvelle expression (4.12) de J_2 . Par conséquent

$$J_2 = -2 \int_{\mathbb{R}} \left(\int_1^\infty k(t, \xi) d\xi \right) dt = -2 \int_{\mathbb{R}} \varphi'(t) G(t) dt, \quad (4.13)$$

où

$$G(t) = \int_1^\infty \frac{\sin(t\xi)}{\xi^2} d\xi.$$

En utilisant le critère de Dirichlet (pour la convergence uniforme des intégrales impropres dépendant d'un paramètre), on vérifie que la fonction $G \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et

$$G'(t) = \int_1^\infty \frac{\cos(t\xi)}{\xi} d\xi, \quad t \in \mathbb{R}.$$

De plus $G \in L^\infty(\mathbb{R})$ car

$$|G(t)| \leq \int_1^\infty \frac{1}{\xi^2} d\xi = 1, \quad t \in \mathbb{R}.$$

En intégrant par parties dans (4.13), on obtient

$$J_2 = -2 \left(\varphi(t) G(t) \right) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) G'(t) dt$$

c'est-à-dire

$$J_2 = 2 \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \left(\int_1^\infty \frac{\cos(t\xi)}{\xi} d\xi \right) dt.$$

On a donc interverti l'ordre d'intégration dans J_2 , mais après avoir transformé l'intégrale pour pouvoir appliquer le théorème de Fubini.

$\triangleright H \ln |x| \in \mathcal{S}'$ donc $T = Pf \frac{H}{x} = (H \ln |x|)' \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Rappelons que pour tout $\varphi \in \mathcal{S}$

$$\langle T, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \varphi(0) \ln \varepsilon \right),$$

et on a montré (voir l'exercice 2.11) que

$$T - \overset{\vee}{T} = Vp \frac{1}{x}.$$

De même, on vérifie que

$$T + \overset{\vee}{T} = Pf \frac{1}{|x|}.$$

En prenant la T.F. dans les égalités précédentes, on obtient

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(T) - \mathcal{F}(\overset{\vee}{T}) &= \mathcal{F}\left(Vp \frac{1}{x}\right), \\ \mathcal{F}(T) + \mathcal{F}(\overset{\vee}{T}) &= \mathcal{F}\left(Pf \frac{1}{|x|}\right),\end{aligned}$$

d'où on tire

$$\mathcal{F}(T) = \frac{1}{2} \left(\mathcal{F}\left(Pf \frac{1}{|x|}\right) + \mathcal{F}\left(Vp \frac{1}{x}\right) \right) = \frac{1}{2} (-2 \ln |\xi| - 2\gamma - i\pi \operatorname{sgn}(\xi)).$$

Par conséquent

$$\mathcal{F}\left(Pf \frac{H}{x}\right) = -\ln |\xi| - i\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(\xi) - \gamma.$$

Remarque : On peut aussi utiliser la relation $xT = xVp \frac{H}{x} = H$, d'où

$$\mathcal{F}(H) = -iVp \frac{1}{\xi} + \pi\delta = \mathcal{F}(xT) = i(\mathcal{F}(T))'.$$

On déduit que

$$(\mathcal{F}(T))' = -Vp \frac{1}{\xi} - i\pi\delta,$$

de sorte que

$$\mathcal{F}(T) = -\ln |\xi| - i\pi H + C,$$

où C est une constante à déterminer.

En utilisant l'égalité $T + \overset{\vee}{T} = Pf \frac{1}{|x|}$ ainsi que la relation $\mathcal{F}(\overset{\vee}{T}) = \mathcal{F}(\overset{\vee}{T})$, on obtient

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(T + \overset{\vee}{T}) &= -2 \ln |\xi| - i\pi (H + \overset{\vee}{H}) + 2C = -2 \ln |\xi| - i\pi + 2C \\ &= \mathcal{F}\left(Pf \frac{1}{|x|}\right) = -2(\ln |\xi| + \gamma),\end{aligned}$$

d'où on tire $C = -\gamma + i\frac{\pi}{2}$ et on retrouve le résultat précédent.

Solution 4.16. On a (voir l'exercice 4.9)

$$\mathcal{F}\left(1_{[-n,n]}\right)(\xi) = 2 \frac{\sin(n\xi)}{\xi}, \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

et de plus

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 1_{[-n,n]} = 1 \quad \text{dans } \mathcal{S}'(\mathbb{R}).$$

En effet pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{S}$

$$\langle 1_{[-n,n]}, \varphi \rangle = \int_{-n}^n \varphi(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx,$$

car $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$. D'un autre côté, on a vu dans l'exercice 2.14 que la suite $\left(\frac{\sin(n\xi)}{\xi}\right)_n$ converge vers $\pi\delta$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Les calculs sont en fait valables pour des fonctions test dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et on déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin(n\xi)}{\xi} = \pi\delta \quad \text{dans } \mathcal{S}'(\mathbb{R}).$$

Comme l'application $\mathcal{F} : \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'$ est continue, on conclut que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{F}(1_{[-n,n]}) = \mathcal{F}(1) = 2 \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin(n\xi)}{\xi} \quad \text{dans } \mathcal{S}'(\mathbb{R}),$$

d'où

$$\mathcal{F}(1) = 2\pi\delta.$$

Solution 4.17. 1) Soit $k \in \mathbb{N}^*$

$$\mathcal{F}(\delta^{(k)}) = (i\xi)^k \mathcal{F}(\delta) = (i\xi)^k.$$

2) $x^n T = 0$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ si et seulement si $\mathcal{F}(x^n T) = \mathcal{F}(0) = 0$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, car l'application $\mathcal{F} : \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'$ est bijective. Comme $\mathcal{F}(x^n T) = i^n \frac{d^n}{d\xi^n} \mathcal{F}(T)$, cette équation est équivalente à

$$\frac{d^n}{d\xi^n} \mathcal{F}(T) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{S}'(\mathbb{R}).$$

Ainsi $\mathcal{F}(T)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $(n-1)$. Par conséquent $x^n T = 0$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ si et seulement si, il existe $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ tels que

$$\mathcal{F}(T) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \xi^k.$$

En utilisant la première question, on voit que

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k \xi^k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{i^k} \mathcal{F}(\delta^{(k)}) = \mathcal{F}\left(\sum_{k=0}^{n-1} b_k \delta^{(k)}\right),$$

où $b_k = (-i)^k a_k$, $k = 0, 1, \dots, n-1$. En utilisant l'injectivité de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{S}'$, on conclut que les seules solutions de $x^n T = 0$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ sont de la forme

$$T = \sum_{k=0}^{n-1} b_k \delta^{(k)}, \quad b_k \in \mathbb{C}.$$

Solution 4.18. 1) Pour tout $\varepsilon > 0$, $H_\varepsilon \in L^1(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. De plus pour $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} H_\varepsilon(x) = H(x)$ et si $\varphi \in \mathcal{S}$

$$\langle H_\varepsilon, \varphi \rangle = \int_0^{+\infty} e^{-\varepsilon x} \varphi(x) dx \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} \varphi(x) dx = \langle H, \varphi \rangle,$$

d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue puisque pour $x > 0$, $|e^{-\varepsilon x} \varphi(x)| \leq |\varphi(x)| \in L^1(]0, +\infty[)$. Ainsi

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} H_\varepsilon = H \quad \text{dans } \mathcal{S}'(\mathbb{R}).$$

2) On pose $T_\varepsilon = \mathcal{F}(H_\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon + i\xi}$, d'après l'exercice 4.9.

Soit $S_\varepsilon = \frac{1}{x - i\varepsilon} - \frac{1}{x + i\varepsilon}$, on écrit alors

$$S_\varepsilon = i \left(\frac{1}{ix + \varepsilon} + \frac{1}{-ix + \varepsilon} \right) = i(T_\varepsilon + \overset{\vee}{T}_\varepsilon),$$

de sorte que

$$\frac{1}{2i\pi} S_\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(H_\varepsilon + \overset{\vee}{H}_\varepsilon).$$

Comme $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} H_\varepsilon = H$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ alors $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \overset{\vee}{H}_\varepsilon = \overset{\vee}{H}$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ et la continuité de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{S}'$ entraîne que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \mathcal{F}(H_\varepsilon + \overset{\vee}{H}_\varepsilon) = \mathcal{F}(H + \overset{\vee}{H}) = \mathcal{F}(1) = 2\pi\delta \quad \text{dans } \mathcal{S}'.$$

On conclut que

$$\frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} S_\varepsilon = \delta \quad \text{dans } \mathcal{S}'.$$

Solution 4.19. $|x| \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R})$ et $(1+x^2)^{-2}|x| \in L^1(\mathbb{R})$, car au voisinage de $\pm\infty$, $(1+x^2)^{-2}|x| \simeq \frac{1}{|x|^3}$. Par conséquent $|x| \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. De plus, en calculant les dérivées à l'aide de la formule des sauts, on trouve

$$|x|' = \text{sgn}(x), \quad |x|'' = 2\delta \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

Par conséquent

$$\mathcal{F}(|x|'') = (i\xi)^2 \mathcal{F}(|x|) = 2\mathcal{F}(\delta) = 2.$$

Ainsi

$$\xi^2 \mathcal{F}(|x|) = -2,$$

ce qui entraîne que (voir l'exercice 2.28)

$$\mathcal{F}(|x|) = -2Pf \frac{1}{\xi^2} + C_1\delta' + C_2\delta,$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes à déterminer. Comme $|x|$ est une distribution paire, il en est de même de sa T.F., ce qui implique que $C_1 = 0$. Sachant que (voir l'exercice 4.15)

$$\mathcal{F}\left(Pf \frac{1}{\xi^2}\right) = -\pi|x|,$$

on déduit que

$$\mathcal{F} \circ \mathcal{F}(|x|) = 2\pi |x| = -2(-\pi |x|) + C_2$$

d'où $C_2 = 0$. On conclut donc que

$$\mathcal{F}(|x|) = -2Pf \frac{1}{\xi^2}.$$

Remarque : En fait l'égalité $\mathcal{F}(Pf \frac{1}{\xi^2}) = -\pi |x|$, entraîne directement que $|x| \in \mathcal{S}'$ et

$$\mathcal{F}(|x|) = -\frac{1}{\pi} \mathcal{F} \circ \mathcal{F}(Pf \frac{1}{\xi^2}) = -2Pf \frac{1}{\xi^2}.$$

On peut aussi utiliser l'expression suivante

$$|x| = x \operatorname{sgn}(x) = x(H - \overset{\vee}{H}).$$

Solution 4.20. 1) Soit $\gamma \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re} \gamma > 0$, alors $|e^{-\gamma|x|^2}| = e^{-\operatorname{Re} \gamma |x|^2} \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et comme $e^{-\gamma|x|^2} = \prod_{j=1}^N e^{-\gamma x_j^2}$ alors en utilisant le théorème de Fubini, on voit que

$$\mathcal{F}(e^{-\gamma|x|^2}) = \prod_{j=1}^N \mathcal{F}(e^{-\gamma x_j^2}),$$

ce qui permet de se ramener au calcul la T.F. de la fonction en une dimension $e^{-\gamma x^2}$, $x \in \mathbb{R}$. Nous allons montrer que

$$\mathcal{F}(e^{-\gamma x^2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\gamma}} e^{-\frac{\xi^2}{4\gamma}},$$

où $\sqrt{z}$ est la fonction définie sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ par $\sqrt{z} = e^{\frac{1}{2} \ln z}$, $\ln z$ étant la détermination principale du logarithme dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ c'est-à-dire $\ln z = \ln |z| + i \arg z$ avec $\arg z \in]-\pi, \pi[$ de sorte que

$$\sqrt{z} = \sqrt{|z|} e^{\frac{i}{2} \arg z}, \quad \arg z \in]-\pi, \pi[, \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-.$$

Soit $\Omega = \{\gamma \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} \gamma > 0\}$ et soit pour ξ fixé dans $\mathbb{R}$, la fonction définie sur Ω par

$$F_\xi(\gamma) = \mathcal{F}(e^{-\gamma x^2})(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} e^{-\gamma x^2} dx.$$

Nous allons montrer que F_ξ est holomorphe dans Ω et pour cela, nous appliquerons le théorème de Lebesgue (pour les intégrales dépendant d'un paramètre) sur l'ouvert $\Omega_\alpha = \{\gamma \in \Omega; \operatorname{Re} \gamma > \alpha\}$ pour $\alpha > 0$ quelconque.

Soit $\alpha > 0$ fixé, clairement la fonction $\gamma \mapsto e^{-ix\xi} e^{-\gamma x^2}$ est holomorphe dans Ω_α , $\frac{\partial}{\partial \gamma}(e^{-ix\xi} e^{-\gamma x^2}) = e^{-ix\xi}(-x^2)e^{-\gamma x^2}$ et on a pour $\gamma \in \Omega_\alpha$ et $x \in \mathbb{R}$

$$|e^{-ix\xi} e^{-\gamma x^2}| \leq e^{-\alpha x^2}, \quad \left| \frac{\partial}{\partial \gamma}(e^{-ix\xi} e^{-\gamma x^2}) \right| \leq x^2 e^{-\alpha x^2},$$

avec $e^{-\alpha x^2}$, $x^2 e^{-\alpha x^2} \in L^1(\mathbb{R})$. Par conséquent F_ξ est holomorphe dans Ω_α pour tout $\alpha > 0$ et donc aussi dans Ω (et de plus $F'_\xi(\gamma) = -\int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-ix\xi} e^{-\gamma x^2} dx$).

La fonction $G_\xi(\gamma) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\gamma}} e^{-\frac{\xi^2}{4\gamma}}$ est également holomorphe dans Ω car elle est composée de fonctions holomorphes. Comme F_ξ et G_ξ coïncident sur $]0, +\infty[$, alors elles coïncident sur Ω . Ainsi pour tout $\gamma \in \Omega$

$$\mathcal{F}(e^{-\gamma x^2})(\xi) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\gamma}} e^{-\frac{\xi^2}{4\gamma}}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

En dimension N quelconque, on a donc

$$\mathcal{F}\left(e^{-\gamma|x|^2}\right) = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\gamma}}\right)^N e^{-\frac{|\xi|^2}{4\gamma}}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \quad \forall \gamma \in \Omega.$$

2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n = i\beta$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-\gamma_n|x|^2} = e^{-i\beta|x|^2}$, pour tout $x \in \mathbb{R}^N$. Soit $\varphi \in \mathcal{S}$,

$$|e^{-\gamma_n|x|^2} \varphi(x)| = e^{-\alpha_n|x|^2} |\varphi(x)| \leq |\varphi(x)| \in L^1(\mathbb{R}^N),$$

donc d'après le théorème de la convergence dominée de Lebesgue

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\gamma_n|x|^2} \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\beta|x|^2} \varphi(x) dx,$$

c'est-à-dire

$$e^{-\gamma_n|x|^2} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} e^{-i\beta|x|^2} \quad \text{dans } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N).$$

Comme $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ est continue, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{F}(e^{-\gamma_n|x|^2}) = \mathcal{F}(e^{-i\beta|x|^2}) \quad \text{dans } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N).$$

Par conséquent

$$\mathcal{F}(e^{-i\beta|x|^2}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\gamma_n}}\right)^N e^{-\frac{|\xi|^2}{4\gamma_n}} = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{i\beta}}\right)^N \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-\frac{|\xi|^2}{4\gamma_n}} \quad \text{dans } \mathcal{S}'.$$

Nous écrivons $\frac{1}{\gamma_n} = \frac{\overline{\gamma_n}}{|\gamma_n|^2} = \frac{\alpha_n - i\beta_n}{|\gamma_n|^2}$ avec $\frac{\alpha_n}{|\gamma_n|^2} > 0$ et nous vérifions comme ci-dessus que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-\frac{|\xi|^2}{4\gamma_n}} = e^{-\frac{|\xi|^2}{4i\beta}} \quad \text{dans } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N),$$

ce qui entraîne que

$$\mathcal{F}(e^{-i\beta|x|^2}) = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{i\beta}}\right)^N e^{-\frac{|\xi|^2}{4i\beta}}.$$

Noter que $\sqrt{i\beta} = \sqrt{|\beta|} e^{\frac{i\pi}{4} \operatorname{sgn}(\beta)}$.

En conclusion, on a

$$\mathcal{F}(e^{-\gamma|x|^2}) = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\gamma}}\right)^N e^{-\frac{|\xi|^2}{4\gamma}}, \quad \forall \gamma \in \mathbb{C}^*; \operatorname{Re} \gamma \geq 0.$$

Solution 4.21. Dans $\mathcal{S}'$, l'équation $L(T) = \delta$ est équivalente à l'équation

$$\mathcal{F}(L(T)) = \mathcal{F}(\delta) = 1,$$

avec

$$\mathcal{F}(T^{(4)} - T'' + T) = ((i\xi)^4 - (i\xi)^2 + 1)\mathcal{F}(T) = (\xi^4 + \xi^2 + 1)\mathcal{F}(T).$$

On se ramène donc à résoudre dans $\mathcal{S}'$ l'équation

$$(\xi^4 + \xi^2 + 1)\mathcal{F}(T) = 1.$$

Comme le polynôme $\xi^4 + \xi^2 + 1$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, la seule solution de cette équation dans $\mathcal{S}'$ est

$$\mathcal{F}(T) = \frac{1}{\xi^4 + \xi^2 + 1}.$$

Soit

$$\frac{1}{\xi^4 + \xi^2 + 1} = \frac{a\xi + b}{\xi^2 + \xi + 1} + \frac{c\xi + d}{\xi^2 - \xi + 1},$$

où a, b, c, d sont des constantes à déterminer. Comme la fonction $\frac{1}{\xi^4 + \xi^2 + 1}$ est paire, on déduit les relations $c = -a$ et $b = d$ puis après calcul, on trouve $b = d = \frac{1}{2}$ et $c = -a = -\frac{1}{2}$. Ainsi

$$\mathcal{F}(T) = \frac{1}{2} \left(\frac{\xi + 1}{\xi^2 + \xi + 1} + \frac{-\xi + 1}{\xi^2 - \xi + 1} \right) = \frac{1}{2}(f_1 + f_2),$$

avec

$$f_1(\xi) = \frac{\xi}{\xi^2 + \xi + 1} + \frac{1}{\xi^2 + \xi + 1} \quad \text{et} \quad f_2(\xi) = f_1(-\xi) = f_1^\vee(\xi).$$

Par conséquent

$$T = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F} \circ \mathcal{F}(T) = \frac{1}{4\pi} (\mathcal{F}(f_1) + \mathcal{F}(f_2)).$$

On a (voir l'exercice 4.12)

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{\xi^2 + \xi + 1}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} e^{\frac{i}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}|x|} =: G(x),$$

donc

$$\mathcal{F}\left(\frac{\xi}{\xi^2 + \xi + 1}\right) = i \frac{d}{dx} \mathcal{F}\left(\frac{1}{\xi^2 + \xi + 1}\right) = iG'(x) = -\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sgn}(x)\right) G(x),$$

de sorte que

$$\mathcal{F}(f_1) = G + iG' = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sgn}(x)\right) G(x).$$

Par conséquent

$$T = \frac{1}{4\pi} (\mathcal{F}(f_1) + \mathcal{F}(f_1)^\vee) = \frac{1}{2\sqrt{3}} e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}|x|} \left(\cos \frac{x}{2} + \sqrt{3} \sin \frac{|x|}{2} \right).$$

Remarque : La fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{\xi^4 + \xi^2 + 1}$ est dans $L^1(\mathbb{R})$ donc

$$\overline{\mathcal{F}}\left(\frac{1}{\xi^4 + \xi^2 + 1}\right)(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\xi x}}{\xi^4 + \xi^2 + 1} d\xi, \quad x \in \mathbb{R},$$

et on peut calculer l'intégrale à l'aide de la méthode des résidus. Comme $\overline{\mathcal{F}}\left(\frac{1}{\xi^4 + \xi^2 + 1}\right)$ est une fonction paire, nous ferons le calcul pour $x > 0$. Soit $R > 0$ (destiné à tendre vers l'infini) et Γ_R le contour formé par le segment d'origine $A = (-R, 0)$ et d'extrémité $B = (R, 0)$ fermé par le demi-cercle C_R centré à l'origine et de rayon R contenu dans le demi-plan $\text{Im } z > 0$ et orienté dans le sens trigonométrique. Soit la fonction $f(z) = \frac{e^{izx}}{z^4 + z^2 + 1}$, pour R assez grand, on a

$$\int_{\Gamma_R} \frac{e^{izx}}{z^4 + z^2 + 1} dz = \int_{\Gamma_R} f(z) dz = 2i\pi \sum_k \text{Res}(f, z_k),$$

où les z_k sont les pôles de f contenus dans le demi-plan $\text{Im } z > 0$.

Sachant que les racines de l'équation $t^2 + t + 1 = 0$ sont $j = e^{\frac{2\pi}{3}i}$ et $\bar{j}$, on a $z^4 + z^2 + 1 = 0$ si et seulement si $z^2 = j$ ou $z^2 = \bar{j}$ donc ses solutions sont $\{z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}, z_2 = -\bar{z}_1 = -e^{-i\frac{\pi}{3}}, -z_1, -z_2\}$. Pour $k = 1, 2$, z_k est un pôle simple de f , $\text{Im } z_k > 0$ et

$$\text{Res}(f, z_k) = \lim_{z \rightarrow z_k} (z - z_k) f(z) = \frac{e^{iz_k x}}{4z_k^3 + 2z_k},$$

donc

$$\int_{\Gamma_R} f(z) dz = i\pi \left(\frac{e^{iz_1 x}}{2z_1^3 + z_1} + \frac{e^{iz_2 x}}{2z_2^3 + z_2} \right).$$

On fait alors tendre R vers $+\infty$, on applique le lemme du grand cercle et on obtient

$$\overline{\mathcal{F}}\left(\frac{1}{\xi^4 + \xi^2 + 1}\right)(x) = i\pi \left(\frac{e^{iz_1 x}}{2z_1^3 + z_1} + \frac{e^{iz_2 x}}{2z_2^3 + z_2} \right), \quad x > 0.$$

Par conséquent, on obtient pour $x \in \mathbb{R}$

$$\overline{\mathcal{F}}\left(\frac{1}{\xi^4 + \xi^2 + 1}\right)(x) = i\pi \left(\frac{e^{iz_1|x|}}{2z_1^3 + z_1} + \frac{e^{iz_2|x|}}{2z_2^3 + z_2} \right) = -2\pi \text{Im} \frac{e^{iz_1|x|}}{2z_1^3 + z_1},$$

puis

$$T = \frac{1}{2\pi} \overline{\mathcal{F}}\left(\frac{1}{\xi^4 + \xi^2 + 1}\right) = \frac{1}{2\sqrt{3}} e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}|x|} \left(\cos \frac{x}{2} + \sqrt{3} \sin \frac{|x|}{2} \right).$$

Solution 4.22. $S, T \in \mathcal{E}'$ donc $S * T$ existe, $S * T \in \mathcal{E}'$ et $\mathcal{F}(S * T) = \mathcal{F}(S) \mathcal{F}(T)$. Soit f le prolongement holomorphe à $\mathbb{C}$ de $\mathcal{F}(S)$ et g celui de $\mathcal{F}(T)$. Pour une fonction h quelconque, notons Z_h l'ensemble de ses zéros dans $\mathbb{C}$. L'équation $S * T = 0$ dans $\mathcal{S}'$ est équivalente à $\mathcal{F}(S) \mathcal{F}(T) = 0$ dans $\mathbb{R}$ ou encore à $fg = 0$ dans $\mathbb{C}$ c'est-à-dire

$$Z_{fg} = Z_f \cup Z_g = \mathbb{C}. \quad (4.14)$$

Si ni f ni g n'est identiquement nulle, alors Z_f et Z_g sont des ensembles discrets et leur réunion ne peut être égale à $\mathbb{C}$, ce qui contredit (4.14). On conclut donc que f ou g est identiquement nulle. Ainsi $\mathcal{F}(S) = 0$ ou bien $\mathcal{F}(T) = 0$, c'est-à-dire $S = 0$ ou $T = 0$.

Ce résultat est faux si S ou T n'est pas à support compact. Pour s'en convaincre, considérer les distributions non nulles $S = 1 \in \mathcal{S}' \setminus \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ et $T = \delta' \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$. Leur convolution est nulle :

$$S * T = 1 * \delta' = 1' * \delta = 0 * \delta = 0.$$

Solution 4.23. Comme $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ est une bijection et $\mathcal{F}(T^{(k)}) = (i\xi)^k \mathcal{F}(T)$, il s'agira de montrer que $\xi^k \mathcal{F}(T) \in L^2(\mathbb{R})$ pour $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq 4$.

L'équation $T^{(4)} + \lambda^2 T = f$ dans $\mathcal{S}'$ est équivalente à

$$((i\xi)^4 + \lambda^2) \mathcal{F}(T) = \mathcal{F}(f),$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{F}(T) = \frac{\mathcal{F}(f)}{\xi^4 + \lambda^2}.$$

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq k \leq 4$, comme la fonction $\xi \mapsto \frac{\xi^k}{\xi^4 + \lambda^2}$ est dans $L^\infty(\mathbb{R})$, on déduit que la fonction

$$\xi^k \mathcal{F}(T) = \frac{\xi^k}{\xi^4 + \lambda^2} \mathcal{F}(f)$$

est dans $L^2(\mathbb{R})$, d'où le résultat.

Remarque : Rappelons que $T \in H^4(\mathbb{R})$ si et seulement si $(1 + \xi^2)^2 \mathcal{F}(T) \in L^2(\mathbb{R})$, ce qui est assuré par le fait que la fonction $\xi \mapsto \frac{(1 + \xi^2)^2}{\xi^4 + \lambda^2}$ est dans $L^\infty(\mathbb{R})$.

Solution 4.24. $\triangleright$ Soit $f, g \in L^2(\mathbb{R}^N)$, montrons que $\mathcal{F}(fg) = (2\pi)^{-N} \hat{f} * \hat{g}$.

Notons que $fg \in L^1(\mathbb{R}^N)$ donc sa T.F. est bien définie (et c'est une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}^N$). Pour montrer l'égalité précédente, nous allons utiliser la densité de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ dans $L^2(\mathbb{R}^N)$. Soit $(f_n)_n \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ et $(g_n)_n \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ telles que $f_n \rightarrow f$ dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ et $g_n \rightarrow g$ dans $L^2(\mathbb{R}^N)$. En particulier la suite $(f_n)_n$ est bornée dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ et comme d'après l'inégalité triangulaire et l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\|f_n g_n - fg\|_{L^1} = \|(f_n - f)g + f_n(g_n - g)\|_{L^1} \leq \|f_n - f\|_{L^2} \|g\|_{L^2} + \|g_n - g\|_{L^2} \|f_n\|_{L^2},$$

on déduit que la suite $(f_n g_n)_n$ converge vers fg dans $L^1(\mathbb{R}^N)$ et donc aussi dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$. La continuité de $\mathcal{F} : \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'$ permet alors de déduire que

$$\mathcal{F}(fg) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{F}(f_n g_n) \quad \text{dans } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N).$$

En utilisant l'égalité $\mathcal{F}(\varphi\psi) = (2\pi)^{-N} \widehat{\varphi} * \widehat{\psi}$ pour des fonctions $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, on déduit

$$\mathcal{F}(fg) = (2\pi)^{-N} \lim_{n \rightarrow +\infty} (\widehat{f}_n * \widehat{g}_n) \quad \text{dans } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N).$$

On obtiendra alors le résultat voulu dès qu'on aura vérifié que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\widehat{f}_n * \widehat{g}_n) = \widehat{f} * \widehat{g} \quad \text{dans } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N).$$

En effet, en utilisant l'inégalité triangulaire et l'inégalité de Young, on obtient

$$\begin{aligned} \|\widehat{f}_n * \widehat{g}_n - \widehat{f} * \widehat{g}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} &\leq \|(\widehat{f}_n - \widehat{f}) * \widehat{g}_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \|\widehat{f} * (\widehat{g}_n - \widehat{g})\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq \|\widehat{f}_n - \widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \|\widehat{g}_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \|\widehat{g}_n - \widehat{g}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}. \end{aligned}$$

Sachant que $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^N) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^N)$ est un isomorphisme

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\widehat{f}_n - \widehat{f}\|_{L^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|\widehat{g}_n - \widehat{g}\|_{L^2} = 0,$$

et $\|\widehat{g}_n\|_{L^2}$ est une suite bornée alors $\widehat{f}_n * \widehat{g}_n$ converge vers $\widehat{f} * \widehat{g}$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ et donc aussi dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$. L'unicité de la limite dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ implique que

$$\mathcal{F}(fg) = (2\pi)^{-N} \widehat{f} * \widehat{g},$$

d'abord dans $\mathcal{S}'$ puis au sens des fonctions, c'est-à-dire sur $\mathbb{R}^N$.

Notons que l'égalité reste vraie en remplaçant $\mathcal{F}$ par $\overline{\mathcal{F}}$, c'est-à-dire

$$\overline{\mathcal{F}}(fg) = (2\pi)^{-N} \overline{\mathcal{F}}(f) * \overline{\mathcal{F}}(g), \quad \forall f, g \in L^2(\mathbb{R}^N). \quad (4.15)$$

▷ On utilise l'égalité (4.15) avec $\widehat{f}, \widehat{g} \in L^2(\mathbb{R}^N)$, on obtient

$$\overline{\mathcal{F}}(\widehat{f} \widehat{g}) = (2\pi)^{-N} \overline{\mathcal{F}}(\widehat{f}) * \overline{\mathcal{F}}(\widehat{g}) = (2\pi)^N f * g,$$

d'où

$$f * g = (2\pi)^{-N} \overline{\mathcal{F}}(\widehat{f} \widehat{g}). \quad (4.16)$$

$f * g \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ donc admet une T. F. dans $\mathcal{S}'$ et en utilisant l'égalité (4.16), on écrit

$$\mathcal{F}(f * g) = (2\pi)^{-N} \mathcal{F} \circ \overline{\mathcal{F}}(\widehat{f} \widehat{g}) = \widehat{f} \widehat{g}.$$

On conclut donc que

$$\mathcal{F}(f * g) = \widehat{f} \widehat{g}, \quad \forall f, g \in L^2(\mathbb{R}^N).$$

Solution 4.25. 1) Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, la fonction $(x, y) \mapsto (1 + x^2 + y^2)\varphi(x, y) \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|(1 + x^2)\varphi(x, x)| \leq |(1 + 2x^2)\varphi(x, x)| \leq \|(1 + x^2 + y^2)\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)},$$

d'où

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |\varphi(x, x)| dx &= \int_{\mathbb{R}} (1 + x^2) |\varphi(x, x)| \frac{dx}{1 + x^2} \\ &\leq \|(1 + x^2 + y^2)\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{1 + x^2} < \infty. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Ainsi T est bien définie sur $\mathcal{S}$. Il est clair que T est linéaire, et d'après ce qui précède, on a pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq \int_{\mathbb{R}} |\varphi(x, x)| dx \leq \pi \|(1 + x^2 + y^2)\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)},$$

ce qui implique la continuité de T sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$. On conclut donc que $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$.

2) Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$

$$\langle \widehat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \widehat{\varphi} \rangle = \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(\xi, \xi) d\xi.$$

Pour $\varepsilon > 0$, posons $f_\varepsilon(\xi) = e^{-\varepsilon\xi^2} \widehat{\varphi}(\xi, \xi)$, $\xi \in \mathbb{R}$. On a pour tout $\xi \in \mathbb{R}$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} f_\varepsilon(\xi) = \widehat{\varphi}(\xi, \xi), \quad |f_\varepsilon(\xi)| \leq |\widehat{\varphi}(\xi, \xi)|, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

En utilisant l'inégalité (4.17) avec $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, on voit que $\widehat{\varphi}(\xi, \xi) \in L^1(\mathbb{R})$, donc en appliquant le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on déduit que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(\xi, \xi) d\xi.$$

Par conséquent

$$\langle \widehat{T}, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} I_\varepsilon(\varphi), \quad I_\varepsilon(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}} e^{-\varepsilon\xi^2} \widehat{\varphi}(\xi, \xi) d\xi.$$

3) Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$,

$$I_\varepsilon(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\varepsilon\xi^2} \widehat{\varphi}(\xi, \xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}} e^{-\varepsilon\xi^2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(x,y) \cdot (\xi, \xi)} \varphi(x, y) dx dy \right) d\xi,$$

où la fonction $((x, y), \xi) \mapsto e^{-\varepsilon \xi^2} e^{-i(x, y) \cdot (\xi, \xi)} \varphi(x, y)$ est dans $L^1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$ donc en utilisant le théorème de Fubini, on écrit

$$I_\varepsilon(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x, y) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\varepsilon \xi^2} e^{-i(x, y) \cdot (\xi, \xi)} d\xi \right) dx dy = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x, y) \mathcal{F}(e^{-\varepsilon \xi^2})(x + y) dx dy.$$

Ainsi en utilisant la T.F. de la gaussienne, on obtient

$$I_\varepsilon(\varphi) = \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}} \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x, y) e^{-\frac{(x+y)^2}{4\varepsilon}} dx dy,$$

puis le changement de variables $x = x$, $u = \frac{x+y}{2\sqrt{\varepsilon}}$ donne

$$I_\varepsilon(\varphi) = 2\sqrt{\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x, 2\sqrt{\varepsilon}u - x) e^{-u^2} dx du.$$

On pose pour $\varepsilon > 0$, $g_\varepsilon(x, u) = e^{-u^2} \varphi(x, 2\sqrt{\varepsilon}u - x)$, $(x, u) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} g_\varepsilon(x, u) = e^{-u^2} \varphi(x, -x), \quad \forall (x, u) \in \mathbb{R}^2.$$

De plus, comme $\varphi \in \mathcal{S}$, alors

$$|\varphi(x, u)| \leq \frac{C}{1 + x^2 + u^2}, \quad \forall (x, u) \in \mathbb{R}^2,$$

où $C = \|(1 + x^2 + u^2)\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}$ donc pour $(x, u) \in \mathbb{R}^2$ et $\varepsilon > 0$, on a

$$\left| \varphi(x, 2\sqrt{\varepsilon}u - x) \right| \leq \frac{C}{1 + x^2 + (2\sqrt{\varepsilon}u - x)^2} \leq \frac{C}{1 + x^2}.$$

Ceci entraîne que pour $(x, u) \in \mathbb{R}^2$ et $\varepsilon > 0$

$$|g_\varepsilon(x, u)| \leq C \frac{e^{-u^2}}{1 + x^2},$$

et comme la fonction $(x, u) \mapsto \frac{e^{-u^2}}{1 + x^2} \in L^1(\mathbb{R}^2)$, alors d'après le théorème de la convergence dominée de Lebesgue

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^2} g_\varepsilon(x, u) dx du = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-u^2} \varphi(x, -x) dx du,$$

c'est-à-dire

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} I_\varepsilon(\varphi) = 2\sqrt{\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-u^2} \varphi(x, -x) dx du = 2\sqrt{\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} du \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, -x) dx.$$

On conclut que

$$\langle \widehat{T}, \varphi \rangle = 2\pi \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, -x) dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2).$$

On remarquera que la distribution T est une simple couche portée par la 1^{ère} bissectrice Γ_1 et sa T.F. $\widehat{T}$ est une simple couche portée par la 2^{ème} bissectrice Γ_2 . Plus précisément $T = \frac{1}{\sqrt{2}} \delta_{\Gamma_1}$ et $\widehat{T} = \pi\sqrt{2} \delta_{\Gamma_2}$.

Solution 4.26. $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{inx} \in \mathcal{S}'$ implique $\mathcal{F}(\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{inx}) = 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \delta_n \in \mathcal{S}'$, ce qui entraîne que la suite $(a_n)_n$ est à croissance lente.

Réciproquement, si $(a_n)_n$ est à croissance lente, alors $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \delta_n \in \mathcal{S}'$, d'où $\overline{\mathcal{F}}(\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \delta_n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{inx} \in \mathcal{S}'$.

Solution 4.27. 1) Rappelons l'identité de Poisson : soit $p > 0$, on a

$$\mathbb{I}\mathbb{I}_p = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{np} = \frac{1}{p} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{in\omega x}, \quad \omega = \frac{2\pi}{p}.$$

On écrit

$$\begin{aligned} T &= \tau_a \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_n - \tau_{-a} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_n = \tau_a \mathbb{I}\mathbb{I}_1 - \tau_{-a} \mathbb{I}\mathbb{I}_1 = \tau_a \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{in2\pi x} - \tau_{-a} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{in2\pi x} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} (e^{in2\pi(x-a)} - e^{in2\pi(x+a)}) = -2i \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{in2\pi x} \sin(2\pi na) \\ &= -2i \sum_{n \geq 1} e^{in2\pi x} \sin(2\pi na) + 2i \sum_{m \geq 1} e^{-i2\pi m x} \sin(2\pi ma) \quad (\text{où } m = -n) \\ &= -2i \sum_{n \geq 1} \sin(2\pi na) (e^{in2\pi x} - e^{-in2\pi x}) = 4 \sum_{n \geq 1} \sin(2\pi na) \sin(2\pi nx). \end{aligned}$$

2) On écrit en utilisant l'identité de Poisson

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta'_n = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_n \right)' = \mathbb{I}\mathbb{I}'_1 = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{i2\pi nx} \right)' = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (e^{i2\pi nx})',$$

d'où

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta'_n = 2\pi i \sum_{n \in \mathbb{Z}} n e^{in2\pi x} = 2\pi i \sum_{n \geq 1} n (e^{in2\pi x} - e^{-i2\pi nx}) = -4\pi \sum_{n \geq 1} n \sin(2\pi nx).$$

Solution 4.28. $\triangleright$ Soit $x \in \mathbb{R}$

$$f(x+1) = x+1 - E(x+1) = x+1 - (E(x)+1) = x - E(x) = f(x),$$

donc f est 1-périodique. Le développement en série de Fourier de f est donné par

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n(f) e^{in\omega x}, \quad \text{où } \omega = 2\pi,$$

et

$$C_n(f) = \int_0^1 f(x) e^{-in\omega x} dx = \int_0^1 x e^{-i2\pi nx} dx, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Après calcul, on trouve

$$C_0(f) = \frac{1}{2}, \quad C_n(f) = \frac{i}{2\pi n}, \quad n \in \mathbb{Z}^*$$

Ainsi dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$

$$f = \frac{1}{2} + \frac{i}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{n} e^{i2\pi nx} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{\sin(2\pi nx)}{n}.$$

En utilisant cette expression de f , on obtient sa T.F.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f) &= \frac{1}{2} \mathcal{F}(1) + \frac{i}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{n} \mathcal{F}(e^{i2\pi nx}) = 2\pi \left(\frac{1}{2} \delta + \frac{i}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{n} \delta_{2n\pi} \right) \\ &= \pi \delta + i \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{n} \delta_{2n\pi}. \end{aligned}$$

▷ D'après la formule des sauts, la dérivée de E au sens des distributions est donnée par

$$E' = \sum_{k \in \mathbb{Z}} [E]_{(k)} \delta_k = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_k = \text{III}_1.$$

Par conséquent

$$f' = 1 - E' = 1 - \text{III}_1 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

On a alors

$$\mathcal{F}(f') = \mathcal{F}(1 - \text{III}_1) = 2\pi \delta - \omega \text{III}_\omega,$$

où $\omega = 2\pi$. Ainsi

$$\mathcal{F}(f') = 2\pi \delta - 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{2n\pi} = -2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \delta_{2n\pi}.$$

On peut aussi écrire

$$\mathcal{F}(f') = i\xi \mathcal{F}(f) = i\xi(\pi \delta + i \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{n} \delta_{2n\pi}) = -2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \delta_{2n\pi},$$

car $\xi \delta = 0$ et $\xi \delta_{2\pi n} = 2\pi n \delta_{2\pi n}$, $n \in \mathbb{Z}^*$.

Solution 4.29. Rappelons que le développement en série de Fourier d'une distribution p -périodique T s'écrit

$$T = \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n(T) e^{in\omega x},$$

où $\omega = \frac{2\pi}{p}$ et les coefficients de Fourier sont donnés par

$$C_n(T) = \frac{1}{p} \mathcal{F}(\theta T)(n\omega) = \frac{1}{p} \langle \theta T, e^{-in\omega x} \rangle, \quad n \in \mathbb{Z},$$

θ étant une p -partition de l'unité quelconque. On va voir dans cet exercice que dans le cas d'une fonction f , on peut remplacer θ par $1_{[0,p[}$ et calculer ses coefficients de Fourier par les formules

$$C_n(f) = \frac{1}{p} \langle 1_{[0,p[} f, e^{-in\omega x} \rangle = \frac{1}{p} \int_0^p f(x) e^{-in\omega x} dx, \quad n \in \mathbb{Z},$$

et on retrouve ainsi le développement en série de Fourier (classique) d'une fonction.

Soit f une fonction p -périodique et $f_p = f 1_{[0,p[}$, on a

$$\begin{aligned} f_p * \mathbb{I}_p &= f_p * \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{np} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_p * \delta_{np} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tau_{np} f_p = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x - np) 1_{[0,p[}(x - np) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x) 1_{[np, (n+1)p[}(x) \\ &= f(x) \sum_{n \in \mathbb{Z}} 1_{[np, (n+1)p[}(x) = f(x). \end{aligned}$$

En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique entier $m \in \mathbb{Z}$ tel que $mp \leq x < (m+1)p$, de sorte que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} 1_{[np, (n+1)p[}(x) = 1_{[mp, (m+1)p[}(x) = 1.$$

Ainsi $f = f_p * \mathbb{I}_p$ et donc sa T. F. est donnée par

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f) &= \mathcal{F}(f_p) \mathcal{F}(\mathbb{I}_p) = \mathcal{F}(f_p) \omega \mathbb{I}_\omega = \omega \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}(f_p)(n\omega) \delta_{n\omega} \\ &= \frac{1}{p} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}(f_p)(n\omega) \mathcal{F}(e^{in\omega x}) = \frac{1}{p} \mathcal{F}\left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}(f_p)(n\omega) e^{in\omega x}\right), \end{aligned}$$

où $\omega = \frac{2\pi}{p}$. En utilisant l'injectivité de la T.F., on déduit alors le développement en série de Fourier de f

$$f = \frac{1}{p} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}(f_p)(n\omega) e^{in\omega x} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n(f) e^{in\omega x},$$

où

$$C_n(f) = \frac{1}{p} \mathcal{F}(f_p)(n\omega) = \frac{1}{p} \langle f_p, e^{-in\omega x} \rangle, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Solution 4.30. 1) (a) On a

$$f \stackrel{p}{*} g = \frac{1}{p} (f 1_{[0,p[}) * g,$$

comme les fonctions $f 1_{[0,p[}$ et g sont localement intégrables sur $\mathbb{R}$ et $\text{Supp}(f 1_{[0,p[}) = [0, p]$ est compact alors (voir l'exercice 3.15), $(f 1_{[0,p[}) * g$ existe et $(f 1_{[0,p[}) * g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$. Ainsi $f \stackrel{p}{*} g$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ et $f \stackrel{p}{*} g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$. On vérifie facilement que $f \stackrel{p}{*} g$ est p -périodique et en utilisant le changement de variable $z = x - y$, on écrit

$$f \stackrel{p}{*} g(x) = \frac{1}{p} \int_{x-p}^x f(x-z) g(z) dz = \frac{1}{p} \int_0^p f(x-z) g(z) dz = g \stackrel{p}{*} f(x),$$

car la fonction $z \mapsto f(x-z)g(z)$ est p -périodique.

Soit $\omega = \frac{2\pi}{p}$, comme les fonctions $e^{in\omega x}$ sont p -périodiques, on a pour $n, k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} e^{in\omega x} \stackrel{p}{*} e^{ik\omega x} &= \frac{1}{p} \int_0^p e^{in\omega y} e^{ik\omega(x-y)} dy = \frac{1}{p} e^{ik\omega x} \int_0^p e^{i\omega(n-k)y} dy \\ &= \begin{cases} e^{in\omega x} & \text{si } k = n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

(b) La fonction θf est localement intégrable sur $\mathbb{R}$, à support compact et la fonction g est localement intégrable sur $\mathbb{R}$ donc $(\theta f) * g$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\begin{aligned} (\theta f) * g(x) &= \int_{\mathbb{R}} \theta(y) f(y) g(x-y) dy = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{kp}^{(k+1)p} \theta(y) f(y) g(x-y) dy \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^p \theta(z+kp) f(z+kp) g(x-z-kp) dz \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^p \theta(z+kp) f(z) g(x-z) dz = \int_0^p \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \theta(z+kp) \right) f(z) g(x-z) dz \\ &= \int_0^p f(z) g(x-z) dz = p \stackrel{p}{*} f * g(x). \end{aligned}$$

On a utilisé successivement les propriétés suivantes : $\int_{\mathbb{R}} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{kp}^{(k+1)p}$, le changement de variable $z = y - kp$, la périodicité des fonctions f et g ainsi que l'égalité $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \theta(z+kp) = 1$ pour tout $z \in \mathbb{R}$.

2) (i) $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ donc $\theta S \in \mathcal{E}'$ et comme $T \in \mathcal{S}'$, alors la convolution $(\theta S) * T$ est bien définie et $(\theta S) * T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ donc $S \stackrel{p}{*} T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

De plus, en utilisant l'associativité de la convolution (de trois distributions dont deux sont à supports compacts), on a

$$\tau_p(S \stackrel{p}{*} T) = (S \stackrel{p}{*} T) * \delta_p = \frac{1}{p} ((\theta S) * T) * \delta_p = \frac{1}{p} (\theta S) * (T * \delta_p) = \frac{1}{p} (\theta S) * T,$$

car T est p -périodique, donc $S \stackrel{p}{*} T$ est p -périodique.

(ii) On utilise encore une fois l'associativité de la convolution.

▷ Commutativité : Comme toute distribution $W \in \mathcal{D}'_p$ s'écrit $W = (\theta W) * \mathbb{I}_p$, on obtient pour $S, T \in \mathcal{D}'_p$

$$S \stackrel{p}{*} T = \frac{1}{p} (\theta S) * ((\theta T) * \mathbb{I}_p) = \frac{1}{p} (\theta T) * ((\theta S) * \mathbb{I}_p) = \frac{1}{p} (\theta T) * S,$$

donc

$$S \stackrel{p}{*} T = T \stackrel{p}{*} S.$$

▷ *Associativité* : Soit $S, T, U \in \mathcal{D}'_p$, on a

$$\begin{aligned} (S \stackrel{p}{*} T) \stackrel{p}{*} U &= \frac{1}{p^2} ((\theta S) * T) * (\theta U) = \frac{1}{p^2} (\theta S) * (T * (\theta U)) \\ &= S \stackrel{p}{*} (T \stackrel{p}{*} U). \end{aligned}$$

(iii) Soit $S, T \in \mathcal{D}'_p$, le développement en série de Fourier de $S \stackrel{p}{*} T$ est de la forme

$$S \stackrel{p}{*} T = \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n(S \stackrel{p}{*} T) e^{in\omega x},$$

où $\omega = \frac{2\pi}{p}$, montrons que

$$C_n(S \stackrel{p}{*} T) = C_n(S) C_n(T), \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

On a

$$\mathcal{F}(S \stackrel{p}{*} T) = \frac{1}{p} \mathcal{F}((\theta S) * T) = \frac{1}{p} \mathcal{F}(\theta S) \mathcal{F}(T),$$

et comme $T = (\theta T) * \mathbb{I}_p$, alors (voir (4.5))

$$\mathcal{F}(T) = \omega \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}(\theta T)(n\omega) \delta_{n\omega},$$

de sorte que (voir (4.6))

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(S \stackrel{p}{*} T) &= \frac{2\pi}{p^2} \mathcal{F}(\theta S) \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}(\theta T)(n\omega) \delta_{n\omega} \\ &= 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{p} \mathcal{F}(\theta S)(n\omega) \frac{1}{p} \mathcal{F}(\theta T)(n\omega) \delta_{n\omega} \\ &= 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n(S) C_n(T) \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(e^{in\omega x}) \\ &= \mathcal{F}\left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n(S) C_n(T) e^{in\omega x}\right). \end{aligned}$$

Par conséquent

$$S \stackrel{p}{*} T = \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n(S) C_n(T) e^{in\omega x}, \quad (4.18)$$

ce qui entraîne le résultat.

(iv) On utilise l'identité de Poisson

$$\mathbb{I}_p = \frac{1}{p} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{in\omega x},$$

et la formule (4.18). Pour toute distribution $T \in \mathcal{D}'_p$, on a

$$\mathbb{I}\mathbb{I}_p \overset{p}{*} T = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{p} C_n(T) e^{in\omega x} = \frac{1}{p} \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n(T) e^{in\omega x} = \frac{1}{p} T.$$

On déduit que $U = p \mathbb{I}\mathbb{I}_p$ est l'élément neutre pour l'opérateur $\overset{p}{*}$ dans $\mathcal{D}'_p$. Noter que le développement en série de Fourier de U est

$$U = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{in\omega x},$$

c'est-à-dire

$$C_n(U) = 1, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Remarque : Les résultats précédents montrent que, muni de la convolution $\overset{p}{*}$, $\mathcal{D}'_p$ est une algèbre commutative et unitaire.

Calculons maintenant $\mathbb{I}\mathbb{I}'_p \overset{p}{*} T$ pour $T \in \mathcal{D}'_p$. On a

$$\mathbb{I}\mathbb{I}'_p = \frac{1}{p} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{in\omega x} \right)' = \frac{1}{p} \sum_{n \in \mathbb{Z}} i\omega n e^{in\omega x},$$

d'où en utilisant (4.18)

$$\mathbb{I}\mathbb{I}'_p \overset{p}{*} T = \frac{1}{p} \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n(T) i\omega n e^{in\omega x} = \frac{1}{p} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n(T) e^{in\omega x} \right)' = \frac{1}{p} T'.$$

On en déduit que pour toute distribution $T \in \mathcal{D}'_p$

$$U' \overset{p}{*} T = T',$$

où $U = p \mathbb{I}\mathbb{I}_p$ est l'élément neutre de $\overset{p}{*}$ dans $\mathcal{D}'_p$. Ainsi pour dériver $T \in \mathcal{D}'_p$, il suffit de la convoler par la dérivée de l'élément neutre U .

(v) Etudions le problème de recherche d'inverse pour $\overset{p}{*}$ dans $\mathcal{D}'_p$: Soit $T \in \mathcal{D}'_p$, on cherche une distribution $S \in \mathcal{D}'_p$ telle que $T \overset{p}{*} S = U$. On écrit

$$T = \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n(T) e^{in\omega x}, \quad S = \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n(S) e^{in\omega x},$$

de sorte que $T \overset{p}{*} S = U = p \mathbb{I}\mathbb{I}_p$ si et seulement si

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n(T) C_n(S) e^{in\omega x} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{in\omega x},$$

c'est-à-dire pour tout $n \in \mathbb{Z}$

$$C_n(T) C_n(S) = 1. \tag{4.19}$$

On voit que si un des coefficients $C_n(T)$ est nul, alors l'équation (4.19) correspondante n'a pas de solution, donc T n'admet pas d'inverse pour $\overset{p}{*}$. Par contre si tous les $C_n(T)$ sont non nuls, alors T admet un seul inverse donné par

$$S = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{C_n(T)} e^{in\omega x}.$$

(vi) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on cherche les distributions $X \in \mathcal{D}'_p$ telles que

$$X \overset{p}{*} (\mathbb{I}\mathbb{I}'_p - \lambda \mathbb{I}\mathbb{I}_p) = \mathbb{I}\mathbb{I}_p,$$

ou de manière équivalente

$$X \overset{p}{*} (U' - \lambda U) = U.$$

D'après la question précédente, on voit que si cette équation admet une solution $X \in \mathcal{D}'_p$, elle est unique et X représente l'inverse de $T = U' - \lambda U$ pour $\overset{p}{*}$ dans $\mathcal{D}'_p$.

Le problème se ramène donc à la recherche de $X \in \mathcal{D}'_p$ telle que

$$C_n(X) C_n(U' - \lambda U) = 1, \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

ou encore

$$C_n(X) (in\omega - \lambda) = 1, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Nous distinguons alors deux cas :

◇ Si $\lambda = 0$ alors l'équation de $C_0(X)$ n'a pas de solution et donc il n'y a pas de solution $X \in \mathcal{D}'_p$ de l'équation de convolution.

◇ Si $\lambda \neq 0$ alors

$$C_n(X) = \frac{1}{in\omega - \lambda} = -\frac{\lambda + in\omega}{\lambda^2 + n^2\omega^2}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Par conséquent la solution de l'équation de convolution est donnée par

$$X = -\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\lambda + in\omega}{\lambda^2 + n^2\omega^2} e^{in\omega x}.$$

Solution 4.31. ▷ Soit à résoudre le problème suivant

$$\begin{cases} \partial_t u + C \partial_x u = 0, & (t, x) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \\ u(0, x) = f(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

L'edp (équation aux dérivées partielles) $\partial_t u + C\partial_x u = 0$ est une équation de transport : c'est une edp hyperbolique d'ordre 1.

Nous utiliserons la transformation de Fourier partielle par rapport à x : soit

$$\hat{u}(t, \xi) = \mathcal{F}_x(u)(t, \xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} u(t, x) dx,$$

quand elle est définie, alors formellement

$$\mathcal{F}_x(\partial_t u)(t, \xi) = \partial_t \hat{u}(t, \xi),$$

$$\mathcal{F}_x(\partial_x u)(t, \xi) = i\xi \hat{u}(t, \xi),$$

$$\mathcal{F}_x(u(0, x))(\xi) = \hat{u}(0, \xi).$$

Cette T.F. permet de se ramener à la résolution du problème suivant

$$\begin{cases} \partial_t \hat{u} + C(i\xi) \hat{u} = 0, & (t, \xi) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \\ \hat{u}(0, \xi) = \hat{f}(\xi), & \xi \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

On résout l'équation différentielle par rapport à la variable t , ξ étant considéré comme un paramètre.

Sa solution est de la forme

$$\hat{u}(t, \xi) = K(\xi) e^{-iC\xi t},$$

où K est une fonction à déterminer en utilisant la condition initiale du problème :

$$\hat{u}(0, \xi) = \hat{f}(\xi) = K(\xi),$$

d'où

$$\hat{u}(t, \xi) = \hat{f}(\xi) e^{-iC\xi t} = \mathcal{F}_x(\tau_{Ct} f)(\xi),$$

et on déduit que

$$u(t, x) = \tau_{Ct} f(x) = f(x - Ct).$$

Cette solution a été calculée formellement. Avec cette expression de u , on peut montrer rigoureusement qu'elle est effectivement solution du problème.

▷ Soit à résoudre le problème suivant

$$\begin{cases} \partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0, & (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbb{R}, \\ \lim_{y \rightarrow +\infty} u(x, y) = 0, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

L'edp $\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0$ s'appelle l'équation de Laplace : c'est une edp de type elliptique.

Comme pour le premier problème, on utilise la transformation de Fourier partielle par rapport à x et on se ramène au problème suivant

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\xi^2 \hat{u} + \partial_y^2 \hat{u} = 0, & (\xi, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \\ \hat{u}(\xi, 0) = \hat{f}(\xi), & \xi \in \mathbb{R}, \\ \lim_{y \rightarrow +\infty} \hat{u}(\xi, y) = 0, & \xi \in \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

La résolution de l'équation différentielle donne

$$\hat{u}(\xi, y) = C_1(\xi) e^{|\xi|y} + C_2(\xi) e^{-|\xi|y},$$

où $C_1(\xi)$ et $C_2(\xi)$ sont deux fonctions à déterminer. En utilisant la condition

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \hat{u}(\xi, y) = 0, \quad \xi \in \mathbb{R},$$

on obtient $C_1(\xi) = 0$ puis la condition

$$\hat{u}(\xi, 0) = \hat{f}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R},$$

conduit à $C_2(\xi) = \hat{f}(\xi)$. Ainsi

$$\hat{u}(\xi, y) = \hat{f}(\xi) e^{-|\xi|y}.$$

Rappelons que pour $\alpha > 0$

$$\mathcal{F}\left(\frac{2\alpha}{\alpha^2 + x^2}\right) = 2\pi e^{-\alpha|\xi|},$$

donc pour $y > 0$, on a

$$\hat{u}(\xi, y) = \frac{1}{\pi} \hat{f}(\xi) \mathcal{F}_x\left(\frac{y}{x^2 + y^2}\right)(\xi) = \frac{1}{\pi} \mathcal{F}_x\left(f * \frac{y}{x^2 + y^2}\right)(\xi),$$

où la convolution est prise par rapport à la variable x . On déduit alors que

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} f * \frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{y}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(z)}{(x-z)^2 + y^2} dz.$$

▷ On veut résoudre le problème

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t^2 u - C^2 \partial_x^2 u = 0, & (t, x) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \\ u(0, x) = f(x), & x \in \mathbb{R}, \\ \partial_t u(0, x) = g(x), & x \in \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

L'edp $\partial_t^2 u - C^2 \partial_x^2 u = 0$ s'appelle l'équation des ondes (ou de la corde vibrante) : c'est une edp de type hyperbolique.

En utilisant la transformation de Fourier partielle par rapport à x , on se ramène à résoudre le problème suivant

$$\begin{cases} \partial_t^2 \hat{u} + C^2 \xi^2 \hat{u} = 0, & (t, \xi) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \\ \hat{u}(0, \xi) = \hat{f}(\xi), & \xi \in \mathbb{R}, \\ \partial_t \hat{u}(0, \xi) = \hat{g}(\xi), & \xi \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

On résout l'équation différentielle, on obtient

$$\hat{u}(t, \xi) = K_1(\xi) \cos(C\xi t) + K_2(\xi) \sin(C\xi t),$$

où $K_1(\xi)$ et $K_2(\xi)$ sont deux fonctions à déterminer, en utilisant les deux conditions

$$\hat{u}(0, \xi) = K_1(\xi) = \hat{f}(\xi)$$

$$\partial_t \hat{u}(0, \xi) = C\xi K_2(\xi) = \hat{g}(\xi),$$

et on arrive à

$$\hat{u}(t, \xi) = \hat{f}(\xi) \cos(C\xi t) + \hat{g}(\xi) \frac{\sin(C\xi t)}{C\xi}.$$

On a

$$\hat{f}(\xi) \cos(C\xi t) = \frac{1}{2} \hat{f}(\xi) (e^{iC\xi t} + e^{-iC\xi t}) = \frac{1}{2} \mathcal{F}(\tau_{Ct} f + \tau_{-Ct} f)(\xi).$$

De plus (voir l'exercice 4.9)

$$2 \frac{\sin(a\xi)}{\xi} = \mathcal{F}(1_{[-a, a]}), \quad \text{si } a > 0,$$

et si $a < 0$, on écrit $a = -|a|$ et

$$2 \frac{\sin(a\xi)}{\xi} = -2 \frac{\sin(|a|\xi)}{\xi} = -\mathcal{F}(1_{[-|a|, |a|]})$$

de sorte que

$$2 \frac{\sin(a\xi)}{\xi} = \operatorname{sgn}(a) \mathcal{F}(1_{[-|a|, |a|]}), \quad \forall a \in \mathbb{R}^*.$$

On déduit que

$$\begin{aligned} \hat{g}(\xi) \frac{\sin(C\xi t)}{C\xi} &= \frac{1}{2C} \hat{g}(\xi) \operatorname{sgn}(t) \mathcal{F}_x(1_{[-C|t|, C|t|]}) \\ &= \frac{1}{2C} \operatorname{sgn}(t) \mathcal{F}_x(g * 1_{[-C|t|, C|t|]}) \\ &= \frac{1}{2C} \operatorname{sgn}(t) \mathcal{F}_x\left(\int_{x-C|t|}^{x+C|t|} g(y) dy\right) \\ &= \frac{1}{2C} \mathcal{F}_x\left(\int_{x-Ct}^{x+Ct} g(y) dy\right). \end{aligned}$$

En conclusion

$$u(t, x) = \frac{1}{2} (f(x - Ct) + f(x + Ct)) + \frac{1}{2C} \int_{x-Ct}^{x+Ct} g(y) dy.$$

▷ On veut résoudre le problème

$$\begin{cases} \partial_t u - C^2 \partial_x^2 u = 0, & (t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \\ u(0, x) = f(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

L'edp $\partial_t u - C^2 \partial_x^2 u = 0$ s'appelle l'équation de la chaleur : c'est une edp de type parabolique.

On utilise la T.F. partielle par rapport à x et on se ramène à résoudre le problème

$$\begin{cases} \partial_t \hat{u} + C^2 \xi^2 \hat{u} = 0, & (t, \xi) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \\ \hat{u}(0, \xi) = \hat{f}(\xi), & \xi \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

La solution de l'équation différentielle est donnée par

$$\hat{u}(t, \xi) = \hat{f}(\xi) e^{-C^2 \xi^2 t}.$$

En utilisant la T.F. de la gaussienne, on voit que

$$e^{-C^2 \xi^2 t} = \mathcal{F}_x \left(\frac{1}{2C\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4tC^2}} \right) (\xi),$$

donc

$$\hat{u}(t, \xi) = \frac{1}{2C\sqrt{\pi t}} \mathcal{F}_x \left(f * e^{-\frac{x^2}{4tC^2}} \right),$$

où la convolution est prise par rapport à la variable x et on conclut que

$$u(t, x) = \frac{1}{2C\sqrt{\pi t}} f * e^{-\frac{x^2}{4tC^2}} = \frac{1}{2C\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4tC^2}} dy.$$

CHAPITRE

5

LA TRANSFORMATION DE LAPLACE

Transformation de Laplace des fonctions et des distributions, application à la recherche d'inverse de convolution dans $\mathcal{D}'_+$ et à la résolution d'edo et d'edp.

5.1 Rappel de cours

5.1.1 Transformation de Laplace (T.L.) des fonctions

Notations : Soit

$$E = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}; f = 0 \text{ sur }]-\infty, 0[, f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) \text{ et } \Omega_f \neq \emptyset \right\},$$

où

$$\Omega_f = \{\omega \in \mathbb{R}; e^{-\omega x} f \in L^1(\mathbb{R})\}.$$

On montre que $\Omega_f = \mathbb{R}$ ou bien Ω_f est une demi-droite limitée par la gauche et on note $a = \inf \Omega_f \geq -\infty$. Pour finir, on pose

$$\Pi_b = \{p \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} p > a\}, \quad \text{si } b > -\infty \quad \text{et} \quad \Pi_{-\infty} = \mathbb{C}.$$

Définition 5.1. Soit $f \in E$, sa T.L. est la fonction de la variable complexe notée $\mathcal{L}(f)$ définie sur Π_a par

$$\mathcal{L}(f)(p) = \int_0^{+\infty} e^{-px} f(x) dx.$$

On remarquera que

$$\mathcal{L}(f)(\eta + i\xi) = \mathcal{F}(e^{-\eta x} f)(\xi), \quad \eta + i\xi \in \Pi_a.$$

Exemple : $\mathcal{L}(H)(p) = \frac{1}{p}, \quad p \in \Pi_0.$

Les propriétés de la T.L. seront données dans le cadre de la T.L. des distributions.

5.1.2 T.L. des distributions

Notations : Soit

$$\mathcal{A} = \{T \in \mathcal{D}'_+; \Omega_T \neq \emptyset\}, \quad \text{où } \Omega_T = \{\omega \in \mathbb{R}; e^{-\omega x} T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})\}.$$

Comme pour les fonctions, on montre que $\Omega_T = \mathbb{R}$ ou bien $\Omega_T = (a, +\infty[$, $a \in \mathbb{R}$, et on note pour $a = \inf \Omega_T \geq -\infty$. On introduit l'ensemble des fonctions auxiliaires

$$\mathcal{B} = \left\{ \theta \in C^\infty(\mathbb{R}); \theta = 0 \text{ sur un voisinage de } -\infty, \text{ et } \theta = 1 \text{ sur un voisinage de } [0, +\infty[\right\}.$$

Noter que pour $\theta \in \mathcal{B}$ et $\omega > 0$, la fonction $e^{-\omega x} \theta \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Définition 5.2. Soit $T \in \mathcal{A}$, sa T.L. est la fonction notée $\mathcal{L}(T)$ définie sur Π_a par

$$\mathcal{L}(T)(p) = \langle e^{-\omega x} T, e^{-(p-\omega)x} \theta \rangle,$$

où $\omega \in]a, \operatorname{Re} p[$ et $\theta \in \mathcal{B}$ sont quelconques.

La définition a un sens car le crochet, bien défini dans la dualité $\mathcal{S}' - \mathcal{S}$, est indépendant du choix de ω et θ .

Dans le cas où $T \in \mathcal{E}' \cap \mathcal{D}'_+$, $\mathcal{L}(T)$ est définie sur $\mathbb{C}$ et on peut écrire le crochet sans fonction auxiliaire θ , en prenant $\omega = 0$

$$\mathcal{L}(T)(p) = \langle T, e^{-px} \rangle,$$

le crochet étant bien défini dans la dualité $\mathcal{E}' - \mathcal{E}$.

Notons que $E \subset \mathcal{A}$ et que la T.L. des distributions généralise celle des fonctions.

Exemple : $\mathcal{L}(\delta)(p) = \langle \delta, e^{-px} \rangle = 1, \quad p \in \mathbb{C}.$

5.1.3 Propriétés de la T. L.

- 1) **Linéarité** : $\mathcal{L}(\alpha S + \beta T) = \alpha \mathcal{L}(S) + \beta \mathcal{L}(T)$, $\forall S, T \in \mathcal{A}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.
- 2) **Translation** : $\mathcal{L}(\tau_\alpha T) = e^{-\alpha p} \mathcal{L}(T)$ et $\mathcal{L}(e^{p_0 x} T) = \tau_{p_0} \mathcal{L}(T)$, $T \in \mathcal{A}$.
- 3) **Dilatation** : $\mathcal{L}(\Pi_\lambda T) = \lambda \Pi_{\lambda-1} \mathcal{L}(T)$, $\lambda > 0$, $T \in \mathcal{A}$.
- 4) **Régularité** : $T \in \mathcal{A}$, $\mathcal{L}(T)$ est une fonction holomorphe sur Π_a , à croissance lente, c'est-à-dire

$$\exists C > 0, m \in \mathbb{N}; |\mathcal{L}(T)(p)| \leq C|p|^m \quad \text{pour } \operatorname{Re} p \text{ grand.}$$

- 5) **Dérivation** : $\mathcal{L}(T^{(k)}) = p^k \mathcal{L}(T)$ et $\frac{d^k}{dp^k} \mathcal{L}(T) = \mathcal{L}((-x)^k T)$, $k \in \mathbb{N}$, $T \in \mathcal{A}$.
- 6) **Convolution** : $S, T \in \mathcal{A}$, alors $S * T \in \mathcal{A}$ et $\mathcal{L}(S * T) = \mathcal{L}(S) \mathcal{L}(T)$.
- 7) **Lien avec la T.F.** : $T \in \mathcal{A}$, $\mathcal{L}(T)(\eta + i\xi) = \mathcal{F}(e^{-\eta x} T)(\xi)$, $\eta + i\xi \in \Pi_a$. En particulier, la T.L. est injective dans $\mathcal{A}$.
- 8) **Inverse de convolution dans $\mathcal{D}'_+$** : $S, T \in \mathcal{A}$, $S = T^{-1}$ si et seulement si $\mathcal{L}(S) = \frac{1}{\mathcal{L}(T)}$.

Il convient de faire attention aux domaines de définition des T.L. quand on applique ces propriétés.

Exemples : En utilisant les propriétés ci-dessus, ainsi que les T.L. de H et δ , on déduit aisément que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(e^{\alpha x} H) &= \frac{1}{p - \alpha}, & p \in \Pi_{\operatorname{Re} \alpha}, & \alpha \in \mathbb{C}, \\ \mathcal{L}(x^k H) &= \frac{k!}{p^k}, & p \in \Pi_0, & k \in \mathbb{N}, \\ \mathcal{L}(\sin(\alpha x) H) &= \frac{\alpha}{p^2 + \alpha^2}, & p \in \Pi_0, & \alpha \in \mathbb{R}, \\ \mathcal{L}(\cos(\alpha x) H) &= \frac{p}{p^2 + \alpha^2}, & p \in \Pi_0, & \alpha \in \mathbb{R}, \\ \mathcal{L}(\delta^{(k)}) &= p^k, & p \in \mathbb{C}, & k \in \mathbb{N}, \\ \mathcal{L}(\delta_\alpha) &= e^{-\alpha p}, & p \in \mathbb{C}, & \alpha \geq 0. \end{aligned}$$

5.1.4 Inversion de la T.L.

La propriété 4 ci-dessus caractérise les images par la T.L. On a

Proposition 5.1. Soit F une fonction holomorphe dans Π_a ($a \geq -\infty$), à croissance lente. Alors, il existe une unique distribution $T \in \mathcal{A}$ et $b \geq a$ tels que

$$F = \mathcal{L}(T) \quad \text{dans } \Pi_b \subset \Pi_a.$$

T s'appelle l'**original** de F et se calcule en distinguant les deux cas suivants :

1) Supposons que F vérifie la condition

$$\exists C > 0; |F(p)| \leq \frac{C}{|p|^2} \quad \text{pour } \operatorname{Re} p \text{ grand.} \quad (5.1)$$

Alors l'original de F est une fonction $f \in E \cap \mathcal{C}(\mathbb{R})$, donnée par la **formule de Meslin-Fourier**

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\eta-i\infty}^{\eta+i\infty} e^{px} F(p) dp \quad \text{pour } \eta \text{ assez grand.}$$

Le calcul de cette intégrale complexe à l'aide de la méthode des résidus, donne alors

$$f(x) = H(x) \sum_{p_k} \operatorname{Res}(e^{px} F, p_k),$$

la somme étant étendue à toutes les singularités de F dans $\mathbb{C}$.

2) Considérons le cas général où F vérifie la condition

$$\exists C > 0, m \in \mathbb{N}; |F(p)| \leq C|p|^m \quad \text{pour } \operatorname{Re} p \text{ grand.}$$

Alors la fonction $G = \frac{F}{p^{m+2}}$ vérifie la condition (5.1). Par conséquent, en appliquant ce qui précède, on déduit que $G = \mathcal{L}(g)$ où $g \in E \cap \mathcal{C}(\mathbb{R})$, de sorte que

$$F = p^{m+2} \mathcal{L}(g) = \mathcal{L}(g^{(m+2)}).$$

Remarques : 1) La formule de Meslin-Fourier est obtenue en utilisant la formule d'inversion de la T.F. dans l'égalité $\mathcal{L}(T)(\eta + i\xi) = \mathcal{F}(e^{-\eta x} T)(\xi)$ donnée dans la propriété 7.

2) La méthode de calcul de l'original permet de déduire que

$$\mathcal{A} = \left\{ f^{(k)} \text{ où } f \in E \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}), k \in \mathbb{N} \right\}.$$

3) Lorsque F est une fraction rationnelle, on peut la décomposer en éléments simples et utiliser les T.L. des fonctions et distributions usuelles pour identifier l'original de chaque élément simple.

Exemple : Soit $F = \frac{p^4}{p^2 + 1}$, $p \in \mathbf{\Pi}_0$. On voit que

$$F = p^2 - 1 + \frac{1}{p^2 + 1} = \mathcal{L}(\delta'' - \delta) + \mathcal{L}((\sin x)H), \quad p \in \mathbf{\Pi}_0,$$

donc l'original de F est $T = \delta'' - \delta + (\sin x)H$.

On peut aussi écrire $F = p^4 G$ où $G = \frac{1}{p^2 + 1} = \mathcal{L}((\sin x)H)$, donc

$$F = \mathcal{L}\left(\left((\sin x)H\right)^{(4)}\right) = \mathcal{L}(\delta'' - \delta + (\sin x)H).$$

Comme $\lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{p^2}} = 0$, alors il existe $C > 0$ tel que $|G(p)| \leq \frac{C}{|p|^2}$ pour $\operatorname{Re} p$ grand et on peut appliquer la formule de Meslin-Fourier pour retrouver l'original g de G . Les singularités de G étant des pôles simples $\pm i$, on a

$$\operatorname{Res}(e^{px}G, \pm i) = \frac{e^{\pm ix}}{2(\pm i)}$$

d'où

$$g(x) = \frac{H}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) = (\sin x)H.$$

5.2 Énoncé des exercices

Exercice 5.1. Soit $f \in E$ telle que $\mathcal{L}(f)$ soit définie sur Π_a . Montrer que $\mathcal{L}(\bar{f})(p) = \overline{\mathcal{L}(f)(\bar{p})}$ pour $p \in \Pi_a$ et

$$\mathcal{L}\left(\int_0^x f(t) dt\right)(p) = \frac{\mathcal{L}(f)(p)}{p}, \quad \operatorname{Re} p > \max(a, 0).$$

Exercice 5.2. 1. Soit f une fonction T -périodique, intégrable sur $]0, T[$ ($T > 0$). Montrer que

$$\mathcal{L}(fH)(p) = \frac{1}{1 - e^{pT}} \int_0^T e^{-px} f(x) dx, \quad p \in \Pi_0,$$

puis en déduire que

$$\lim_{\substack{p \rightarrow 0, \\ \operatorname{Re} p > 0}} p \mathcal{L}(fH)(p) = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx.$$

2. Déterminer la T.L. de la fonction fH où f est la fonction 2π -périodique définie par $f(x) = x$ si $x \in]-\pi, \pi]$.

Exercice 5.3. Soit la fonction $F(p) = \frac{p}{(p^2 + 4)^2}$.

1. Préciser le demi-plan sur lequel F est définie.
2. Trouver l'original de F par la T.L., en utilisant la dérivation.
3. En déduire l'original de $G(p) = \frac{1}{(p^2 + 4)^2}$.
4. En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} x \sin(2x) e^{-x} dx$.
5. Retrouver l'original de F par la formule de Meslin-Fourier.

Exercice 5.4. Déterminer les originaux des fonctions suivantes :

$$\frac{p^3}{(p-1)(p-2)}, \quad \frac{p^2+1}{p^2(p-1)^2}, \quad \frac{p^4}{(p^2+4)^2}, \quad \frac{1+e^{-p}}{p(p+1)}, \quad e^{-2p}, \quad \frac{e^{-2p}}{(p-1)^2+4}.$$

(On précisera le demi-plan sur lequel chacune d'elles est définie).

Exercice 5.5. Soient les distributions $S_1 = \sum_{n \geq 0} \delta_{nT}$ et $S_2 = \sum_{n \geq 0} e^{nT} \delta_{nT}$ pour $T > 0$.

1. Vérifier que S_1 et S_2 admettent des T.L.
2. Déterminer $\mathcal{L}(S_1)$ et $\mathcal{L}(S_2)$.
3. En déduire $S_1 * S_1$ et $S_2 * S_2$.

- Exercice 5.6.** 1. On donne la constante d'Euler $\gamma = - \int_0^\infty e^{-t} \ln t \, dt$. Déterminer $\mathcal{L}(H \ln x)(\eta)$ pour $\eta > 0$ puis en déduire $\mathcal{L}(H \ln x)(p)$ pour $\operatorname{Re} p > 0$ ainsi que $\mathcal{L}\left(Vp \frac{H}{x}\right)$.
2. Déterminer $\mathcal{L}(H\sqrt{x})$.

Exercice 5.7. En utilisant la T.L., déterminer dans $\mathcal{D}'_+$, les inverses de convolution des distributions suivantes :

$$H, \quad \delta' - a\delta \ (a \in \mathbb{C}), \quad \delta'' - \lambda^2\delta \ (\lambda \in \mathbb{C}), \quad \delta'' - 3\delta' + 2\delta, \quad H + \delta''.$$

Exercice 5.8. En utilisant la T.L., résoudre dans $\mathcal{D}'_+$ les équations différentielles suivantes :

$$T' - T = \delta, \quad T'' - 3T' + 2T = \delta' + \delta, \quad T^{(3)} - T'' + T' - T = \delta'' - \delta.$$

Exercice 5.9. Trouver la solution classique de l'équation différentielle

$$y^{(3)} - 2y'' + 5y' - 2y = e^{2x}, \quad x > 0,$$

vérifiant les conditions $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 2$. (Ecrire l'équation différentielle satisfaite par $f = yH$ et utiliser la T.L. pour la résoudre).

Exercice 5.10. Trouver la solution y de l'équation intégral-différentielle suivante

$$y''(x) + y(x) + \int_0^x e^{x-t} y(t) \, dt = 0, \quad x > 0,$$

vérifiant les conditions $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. (Considérer la fonction $f = yH$ et utiliser la T.L.).

Exercice 5.11. Résoudre le système suivant

$$x'(t) - x(t) - 4y(t) = 0, \quad y'(t) + x(t) + 3y(t) = 0, \quad t > 0,$$

avec les conditions $x(0) = 1$, $y(0) = 2$.

Exercice 5.12. Résoudre le problème suivant pour $a > 0$, en utilisant la T.L.

$$\left\{ \begin{array}{ll} a^2 \partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0, & (t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times]0, 1[, \\ u(t, 0) = u(t, 1) = 0, & t \in \mathbb{R}_+^*, \\ u(0, x) = 0, \quad \partial_t u(0, x) = \sin(2\pi x), & x \in]0, 1[. \end{array} \right.$$

5.3 Solutions

Solution 5.1. $\triangleright$ Noter que Π_a est stable par conjugaison c'est-à-dire

$$p \in \Pi_a \Leftrightarrow \bar{p} \in \Pi_a.$$

Clairement si $\omega > a$, $e^{-\omega x} \bar{f} \in L^1(\mathbb{R})$ donc $\bar{f} \in E$ et on a pour $p \in \Pi_a$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\bar{f})(p) &= \int_0^\infty e^{-px} \bar{f}(x) dx = \int_0^\infty \overline{e^{-\bar{p}x} f(x)} dx \\ &= \overline{\int_0^\infty e^{-\bar{p}x} f(x) dx} = \overline{\mathcal{L}(f)(\bar{p})}. \end{aligned}$$

$\triangleright$ Rappelons (voir les exercices 3.15 et 3.17) que $\int_0^x f(t) dt = H * f$, $H * f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ et $H * f$ est la seule primitive de f dans $\mathcal{D}'_+$. Soit $\omega \in \mathbb{R}$, on a d'après l'exercice 3.16

$$e^{-\omega x} (H * f) = (e^{-\omega x} H) * (e^{-\omega x} f),$$

et

$$e^{-\omega x} H \in L^1(\mathbb{R}) \text{ si } \omega > 0, \quad e^{-\omega x} f \in L^1(\mathbb{R}) \text{ si } \omega > a,$$

de sorte que

$$e^{-\omega x} (H * f) \in L^1(\mathbb{R}) \text{ si } \omega > \max(a, 0),$$

donc $H * f \in E$ et sa transformée de Laplace est donnée par

$$\mathcal{L}(H * f)(p) = \mathcal{L}(H)(p) \mathcal{L}(f)(p) = \frac{1}{p} \mathcal{L}(f)(p) \quad \text{pour } \operatorname{Re} p > \max(a, 0).$$

Solution 5.2. 1) Montrons que $fH \in E$. Soit $\omega \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_0^{+\infty} e^{-\omega x} |f(x)| dx = \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_{kT}^{(k+1)T} e^{-\omega x} |f(x)| dx.$$

Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, on effectue le changement de variable $y = x - kT$ dans l'intégrale correspondante et on obtient en utilisant la périodicité de f

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-\omega x} |f(x)| dx &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_0^T e^{-\omega(y+kT)} |f(y+kT)| dy \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} e^{-\omega kT} \int_0^T e^{-\omega y} |f(y)| dy \\ &= \int_0^T e^{-\omega y} |f(y)| dy \sum_{k \in \mathbb{N}} e^{-\omega kT}. \end{aligned}$$

Par conséquent si $\omega > 0$, la série géométrique $\sum_{k \in \mathbb{N}} (e^{-\omega T})^k$ est convergente et

$$\int_0^T e^{-\omega y} |f(y)| dy \leq \int_0^T |f(y)| dy < \infty,$$

de sorte que $e^{-\omega x} f H \in L^1(\mathbb{R})$ et $\mathcal{L}(f H)$ est définie sur Π_0 .

Soit $p \in \Pi_0$, on a comme ci-dessus

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f H)(p) &= \int_0^{+\infty} e^{-px} f(x) dx = \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_{kT}^{(k+1)T} e^{-px} f(x) dx \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} (e^{-pT})^k \int_0^T f(y) e^{-py} dy = \frac{1}{1 - e^{-pT}} \int_0^T e^{-px} f(x) dx. \end{aligned}$$

Maintenant pour $\operatorname{Re} p > 0$ et $x \in]0, T[$, on a

$$|e^{-px} f(x)| = e^{-\operatorname{Re} p x} |f(x)| \leq |f(x)| \in L^1(]0, T[)$$

et

$$\lim_{\substack{p \rightarrow 0, \\ \operatorname{Re} p > 0}} e^{-px} f(x) = f(x), \quad x \in]0, T[,$$

donc d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue

$$\lim_{\substack{p \rightarrow 0, \\ \operatorname{Re} p > 0}} \int_0^T e^{-px} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx.$$

Ensuite en utilisant la règle de l'Hopital, on obtient

$$\lim_{p \rightarrow 0} \frac{p}{1 - e^{-pT}} = \frac{1}{T},$$

d'où le résultat.

2) Nous allons appliquer la formule montrée en 1). Calculons

$$\int_0^{2\pi} e^{-px} f(x) dx = \int_0^{\pi} e^{-px} f(x) dx + \int_{\pi}^{2\pi} e^{-px} f(x) dx.$$

Le changement de variable $y = x - 2\pi$ dans la dernière intégrale montre que

$$\int_{\pi}^{2\pi} e^{-px} f(x) dx = \int_{-\pi}^0 e^{-p(y+2\pi)} f(y+2\pi) dy = e^{-2\pi p} \int_{-\pi}^0 e^{-py} f(y) dy,$$

donc pour $p \in \Pi_0$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} e^{-px} f(x) dx &= \int_0^{\pi} e^{-px} x dx + e^{-2\pi p} \int_{-\pi}^0 e^{-py} y dy \\ &= \frac{1}{p^2} (1 - e^{-2\pi p}) - \frac{2\pi}{p} e^{-\pi p}. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\mathcal{L}(fH)(p) = \frac{1}{p^2} - \frac{2\pi}{p(1 - e^{-2\pi p})} e^{-\pi p}, \quad p \in \mathbf{\Pi}_0.$$

Solution 5.3. Soit la fonction $F(p) = \frac{p}{(p^2 + 4)^2}$.

1) Les singularités de F sont $\pm 2i$ donc F est définie (et holomorphe) dans $\mathbf{\Pi}_0$.

2) On cherche f telle que $\mathcal{L}(f) = F$, en utilisant la dérivation. On écrit

$$F(p) = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{p^2 + 4} \right)' = -\frac{1}{2} \frac{d}{dp} \left(\mathcal{L} \left(\frac{1}{2} \sin(2x) H \right) \right)(p) = \frac{1}{4} \mathcal{L}(x \sin(2x) H)(p).$$

On a utilisé la T.L. suivante

$$\mathcal{L}(\sin(\alpha x) H)(p) = \frac{\alpha}{p^2 + \alpha^2}, \quad p \in \mathbf{\Pi}_0, \quad \alpha \in \mathbb{R}^*.$$

On conclut alors que

$$f = \frac{x}{4} \sin(2x) H.$$

3) Soit $G(p) = \frac{1}{(p^2 + 4)^2}$, alors

$$G(p) = \frac{F(p)}{p} = \mathcal{L}(H * f), \quad p \in \mathbf{\Pi}_0,$$

d'après l'exercice 5.1. On calcule alors $H * f$

$$H * f(x) = H(x) \int_0^x \frac{t}{4} \sin(2t) dt = \frac{1}{4} \left(-\frac{x}{2} \cos(2x) + \frac{1}{4} \sin(2x) \right) H(x),$$

et on conclut que l'original de G est

$$g = \frac{1}{16} \left(\sin(2x) - 2x \cos(2x) \right) H.$$

4) On remarque que

$$\int_0^{+\infty} x \sin(2x) e^{-x} dx = \mathcal{L}(x \sin(2x) H)(1) = 4F(1) = \frac{4}{25}.$$

5) Pour $\operatorname{Re} p$ assez grand, on a

$$|F(p)| \leq \frac{C}{|p|^2},$$

où C est une constante positive, on peut alors appliquer la formule de Meslin-Fourier pour calculer l'original f de F . On écrit pour $\eta > 0$ assez grand

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\eta-i\infty}^{\eta+i\infty} F(p) e^{px} dp = H(x) \sum_{k=1}^2 \operatorname{Res}(F(p) e^{px}, p_k),$$

où $p_1 = 2i$ et $p_2 = -2i = \overline{p_1}$ sont les pôles de F et où $\text{Res}(g, z)$ désigne le résidu de la fonction g au point z . Comme p_k est un pôle double de la fonction, on a

$$\begin{aligned} \text{Res}(F(p) e^{px}, p_k) &= \frac{1}{(2-1)!} \left((p-p_k)^2 F(p) e^{px} \right)^{(2-1)} \Big|_{p=p_k} \\ &= \left((p-p_k)^2 F(p) e^{px} \right)' \Big|_{p=p_k}. \end{aligned}$$

On trouve

$$\begin{aligned} \text{Res}(F(p) e^{px}, p_1) &= -\frac{ix}{8} e^{2ix}, \\ \text{Res}(F(p) e^{px}, p_2 = \overline{p_1}) &= \overline{\text{Res}(F(p) e^{px}, p_1)} = -\frac{ix}{8} e^{-2ix}, \end{aligned}$$

d'où pour $x > 0$

$$f(x) = -\frac{ix}{8} (e^{2ix} - e^{-2ix}) = \frac{x}{4} \sin(2x),$$

et on retrouve ainsi le résultat

$$f = \frac{x}{4} \sin(2x) H.$$

Solution 5.4. $\triangleright$ Soit $F_1(p) = \frac{p^3}{(p-1)(p-2)}$.

La fraction rationnelle F_1 est définie sur Π_2 et en la décomposant en éléments simples, on trouve

$$F_1(p) = p + 3 + \frac{7p-6}{(p-1)(p-2)} = p + 3 - \frac{1}{p-1} + \frac{8}{p-2}.$$

On a successivement

$$\begin{aligned} p+3 &= \mathcal{L}(\delta' + 3\delta)(p), \quad p \in \mathbb{C}, \\ \frac{1}{p-1} &= \mathcal{L}(e^x H)(p), \quad p \in \Pi_1, \\ \frac{1}{p-2} &= \mathcal{L}(e^{2x} H)(p), \quad p \in \Pi_2. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$F_1(p) = \mathcal{L}(\delta' + 3\delta - e^x H + 8e^{2x} H)(p), \quad p \in \Pi_2,$$

et donc l'original de F_1 est

$$f_1 = \delta' + 3\delta + (-e^x + 8e^{2x})H.$$

$\triangleright$ $F_2(p) = \frac{p^2+1}{p^2(p-1)^2}$. F_2 est définie sur Π_1 et

$$F_2(p) = \frac{2}{p} + \frac{1}{p^2} - \frac{2}{p-1} + \frac{2}{(p-1)^2}.$$

Comme

$$\frac{1}{p} = \mathcal{L}(H), \quad \frac{1}{p^2} = -\left(\frac{1}{p}\right)' = \mathcal{L}(xH), \quad p \in \mathbf{\Pi}_0,$$

$$\frac{1}{p-1} = \mathcal{L}(e^x H), \quad \frac{1}{(p-1)^2} = -\left(\frac{1}{p-1}\right)' = \mathcal{L}(xe^x H), \quad p \in \mathbf{\Pi}_1,$$

alors

$$F_2(p) = \mathcal{L}(2H + xH - 2e^x H + 2xe^x H)(p), \quad p \in \mathbf{\Pi}_1,$$

et donc l'original de F_2 est

$$f_2 = (2 + x + (2x - 2)e^x)H.$$

Remarque : $|F_2(p)| \leq \frac{1}{|p|^2}$, pour $\operatorname{Re} p$ assez grand on peut donc utiliser la formule de Meslin-Fourier qui donne pour $\eta > 1$

$$f_2(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\eta-i\infty}^{\eta+i\infty} F_2(p) e^{px} dp = H(x) \sum_{k=1}^2 \operatorname{Res}(F_2(p) e^{px}, p_k),$$

où $p_1 = 0$ et $p_2 = 1$ sont des pôles doubles de F_2 . Après calcul, on trouve

$$\operatorname{Res}(F_2(p) e^{px}, p_1) = 2 + x, \quad \operatorname{Res}(F_2(p) e^{px}, p_2) = 2e^x(x - 1),$$

ce qui donne

$$f_2 = (2 + x + (2x - 2)e^x)H.$$

▷ $F_3(p) = \frac{p^4}{(p^2 + 4)^2}$. F_3 est définie sur $\mathbf{\Pi}_0$ et

$$F_3(p) = 1 - \frac{8}{p^2 + 4} + \frac{16}{(p^2 + 4)^2}.$$

On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{p^2 + 4} &= \mathcal{L}\left(\frac{1}{2} \sin(2x) H\right), \quad p \in \mathbf{\Pi}_0, \\ \frac{1}{(p^2 + 4)^2} &= -\frac{1}{2p} \left(\frac{1}{p^2 + 4}\right)' = -\frac{1}{2} \mathcal{L}(H) \mathcal{L}\left(-\frac{x}{2} \sin(2x) H\right) \\ &= \frac{1}{4} \mathcal{L}(H * (x \sin(2x) H)) \\ &= \frac{1}{4} \mathcal{L}\left(\left(-\frac{x}{2} \cos(2x) + \frac{1}{4} \sin(2x)\right) H\right). \end{aligned}$$

Ainsi

$$F_3 = \mathcal{L}\left(\delta - (3 \sin(2x) + 2x \cos(2x)) H\right),$$

ce qui signifie que l'original de F_3 est

$$f_3 = \delta - (3 \sin(2x) + 2x \cos(2x)) H.$$

▷ $F_4(p) = \frac{1 + e^{-p}}{p(p+1)}$. F_4 est définie sur $\mathbf{\Pi}_0$ et

$$F_4(p) = \frac{1}{p(p+1)} + e^{-p} \frac{1}{p(p+1)}.$$

On a

$$\frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} = \mathcal{L}(H - e^{-x}H) = \mathcal{L}((1 - e^{-x})H), \quad p \in \mathbf{\Pi}_0.$$

En utilisant la formule $e^{-ap}\mathcal{L}(T) = \mathcal{L}(\tau_a T)$, on voit que

$$e^{-p} \frac{1}{p(p+1)} = \mathcal{L}(\tau_1((1 - e^{-x})H)) = \mathcal{L}((1 - e^{-(x-1)})H(x-1)).$$

L'original de F_4 est donc

$$f_4 = (1 - e^{-x})H(x) + (1 - e^{-(x-1)})H(x-1).$$

▷ $F_5(p) = e^{-2p}$. F_5 est définie sur $\mathbb{C}$ et

$$F_5 = e^{-2p}\mathcal{L}(\delta) = \mathcal{L}(\tau_2\delta) = \mathcal{L}(\delta_2), \quad p \in \mathbb{C}.$$

Ainsi l'original de F_5 est

$$f_5 = \delta_2.$$

Rappelons aussi que

$$\mathcal{L}(\delta_a)(p) = \langle \delta_a, e^{-px} \rangle = e^{-pa}, \quad p \in \mathbb{C}, \quad a \geq 0,$$

ce qui confirme le résultat.

▷ $F_6(p) = \frac{e^{-2p}}{(p-1)^2 + 4}$. F_6 est définie sur $\mathbf{\Pi}_1$ et

$$\frac{1}{(p-1)^2 + 4} = \tau_1\left(\frac{1}{p^2 + 4}\right) = \frac{1}{2}\tau_1\left(\mathcal{L}(\sin(2x)H)\right) = \frac{1}{2}\mathcal{L}(e^x \sin(2x)H), \quad p \in \mathbf{\Pi}_1,$$

d'où

$$F_6(p) = \frac{1}{2}e^{-2p} \mathcal{L}(e^x \sin(2x)H) = \frac{1}{2}\mathcal{L}(\tau_2(e^x \sin(2x)H)).$$

Par conséquent l'original de F_6 est

$$f_6 = \frac{1}{2}\tau_2(e^x \sin(2x)H) = \frac{1}{2}e^{x-2} \sin(2x-2)H(x-2).$$

Solution 5.5. 1) Rappelons qu'un peigne $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \delta_{nT} \in \mathcal{S}'$ si et seulement si la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est à croissance lente, voir Chapitre 4. Par conséquent $S_1 = \sum_{n \geq 0} \delta_{nT} \in \mathcal{S}' \cap \mathcal{D}'_+ \subset \mathcal{A}$ donc sa T.L. existe et est définie (au moins) sur Π_0 , mais $S_2 = \sum_{n \geq 0} e^{nT} \delta_{nT} \in \mathcal{D}'_+ \setminus \mathcal{S}'$. Soit $\omega \in \mathbb{R}$

$$e^{-\omega x} S_2 = \sum_{n \geq 0} e^{nT(1-\omega)} \delta_{nT} \in \mathcal{S}' \quad \text{si } 1 - \omega \leq 0,$$

donc $S_2 \in \mathcal{A}$ et $\mathcal{L}(S_2)$ existe et est définie (au moins) sur Π_1 .

2) Soit $U = \sum_{n \geq 0} a_n \delta_{nT}$ un demi-peigne de Dirac tel que $\mathcal{L}(U)$ est défini sur Π_a . Montrons que

$$\mathcal{L}(U) = \mathcal{L}\left(\sum_{n \geq 0} a_n \delta_{nT}\right) = \sum_{n \geq 0} a_n \mathcal{L}(\delta_{nT}). \quad (5.2)$$

Soit $p = \eta + i\xi \in \Pi_a$

$$\mathcal{L}(U)(p) = \mathcal{F}(e^{-\eta x} U)(\xi) = \mathcal{F}\left(\sum_{n \geq 0} e^{-\eta n T} a_n \delta_{nT}\right)(\xi).$$

En utilisant la linéarité et la continuité de la T.F. sur $\mathcal{S}'$, on obtient

$$\mathcal{L}(U)(p) = \sum_{n \geq 0} \mathcal{F}(e^{-\eta n T} a_n \delta_{nT})(\xi) = \sum_{n \geq 0} \mathcal{F}(e^{-\eta x} a_n \delta_{nT})(\xi) = \sum_{n \geq 0} \mathcal{L}(a_n \delta_{nT})(p).$$

En appliquant la formule (5.2), on trouve

$$\mathcal{L}(S_1)(p) = \mathcal{L}\left(\sum_{n \geq 0} \delta_{nT}\right) = \sum_{n \geq 0} \mathcal{L}(\delta_{nT}) = \sum_{n \geq 0} e^{-nTp} = \frac{1}{1 - e^{-pT}}, \quad p \in \Pi_0.$$

Noter que $|e^{-pT}| = e^{-(\operatorname{Re} p)T} < 1$ si et seulement si $\operatorname{Re} p > 0$, donc le domaine de définition de $\mathcal{L}(S_1)$ est Π_0 .

On peut déterminer de la même manière $\mathcal{L}(S_2)$ ou remarquer que

$$S_2 = e^x \sum_{n \geq 0} \delta_{nT} = e^x S_1,$$

donc

$$\mathcal{L}(S_2)(p) = \tau_1(\mathcal{L}(S_1))(p) = \tau_1\left(\frac{1}{1 - e^{-pT}}\right) = \frac{1}{1 - e^{-(p-1)T}}, \quad p \in \Pi_1.$$

3) $S_1 \in \mathcal{A}$ donc $S_1 * S_1 \in \mathcal{A}$ et $\mathcal{L}(S_1 * S_1)$ est bien définie sur Π_0 et

$$\mathcal{L}(S_1 * S_1)(p) = \left(\mathcal{L}(S_1)(p)\right)^2 = \left(\frac{1}{1 - e^{-pT}}\right)^2.$$

Nous allons déterminer l'original de $\left(\frac{1}{1-e^{-pT}}\right)^2$ de deux manières différentes.

◇ On écrit

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{1-e^{-pT}}\right)^2 &= -\frac{1}{T} e^{pT} \left(\frac{1}{1-e^{-pT}}\right)' = -\frac{1}{T} e^{pT} \mathcal{L}(-xS_1) \\ &= \frac{1}{T} e^{pT} \mathcal{L}\left(\sum_{n \geq 1} nT\delta_{nT}\right) = e^{pT} \mathcal{L}\left(\sum_{n \geq 1} n\delta_{nT}\right) \\ &= \mathcal{L}\left(\tau_{-T}\left(\sum_{n \geq 1} n\delta_{nT}\right)\right) = \mathcal{L}\left(\sum_{n \geq 1} n\delta_{(n-1)T}\right) \\ &= \mathcal{L}\left(\sum_{m \geq 0} (m+1)\delta_{mT}\right), \quad \text{où } m = n-1. \end{aligned}$$

◇ Rappelons le produit de Cauchy de deux séries numériques

$$\left(\sum_{n \geq 0} u_n\right)\left(\sum_{n \geq 0} v_n\right) = \sum_{n \geq 0} w_n, \quad \text{où } w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k},$$

donc

$$\left(\frac{1}{1-e^{-pT}}\right)^2 = \left(\sum_{n \geq 0} e^{-nTp}\right)^2 = \sum_{n \geq 0} w_n,$$

où

$$w_n = \sum_{k=0}^n e^{-kTp} e^{-(n-k)Tp} = \sum_{k=0}^n e^{-nTp} = (n+1)e^{-nTp}.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{1-e^{-pT}}\right)^2 &= \sum_{n \geq 0} (n+1)e^{-nTp} = \sum_{n \geq 0} (n+1)\mathcal{L}(\delta_{nT})(p) \\ &= \mathcal{L}\left(\sum_{n \geq 0} (n+1)\delta_{nT}\right)(p). \end{aligned}$$

En conclusion

$$S_1 * S_1 = \sum_{n \geq 0} (n+1)\delta_{nT} = \frac{1}{T}(x+T)S_1,$$

d'où on déduit (voir l'exercice 3.16)

$$\begin{aligned} S_2 * S_2 &= (e^x S_1) * (e^x S_1) = e^x (S_1 * S_1) = \frac{1}{T} e^x (x+T)S_1 \\ &= \frac{1}{T} (x+T)S_2 = \sum_{n \geq 0} (n+1)e^{nT}\delta_{nT}. \end{aligned}$$

Solution 5.6. 1) Montrons d'abord que la fonction $H \ln x$ admet une T.L. On sait que $H \ln x \in L_{loc}^1(\mathbb{R})$ donc pour tout $\omega \in \mathbb{R}$, comme la fonction $e^{-\omega x}$ est continue sur $\mathbb{R}$ alors $e^{-\omega x} H \ln x \in L_{loc}^1(\mathbb{R})$. Soit $\omega > 0$, pour $x \geq 1$

$$|e^{-\omega x} \ln x| = e^{-\omega x} \ln x \leq x e^{-\omega x} \in L^1([1, +\infty[),$$

d'où $e^{-\omega x} H \ln x \in L^1(\mathbb{R})$ et donc $H \ln x \in E$ et $\mathcal{L}(H \ln x)$ est définie sur Π_0 .

Soit $\eta > 0$,

$$\mathcal{L}(H \ln x)(\eta) = \int_0^{+\infty} e^{-\eta x} \ln x \, dx,$$

et en utilisant le changement de variable $t = \eta x$, on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(H \ln x)(\eta) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} \ln \left(\frac{t}{\eta} \right) \frac{dt}{\eta} \\ &= \frac{1}{\eta} \left(\int_0^{+\infty} e^{-t} \ln t \, dt - \ln \eta \int_0^{+\infty} e^{-t} \, dt \right) \\ &= -\frac{1}{\eta} (\gamma + \ln \eta). \end{aligned}$$

Soit la fonction $F(p) = -\frac{1}{p}(\gamma + \ln p)$ où $\ln p$ désigne la détermination principale du logarithme, c'est-à-dire

$$\ln p = \ln |p| + i \arg p, \quad -\pi < \arg p \leq \pi.$$

La fonction F est holomorphe dans le demi-plan Π_0 et sa restriction à $\mathbb{R}_+^*$ coïncide avec la restriction à $\mathbb{R}_+^*$ de $\mathcal{L}(H \ln x)$. Par conséquent, ces deux fonctions sont égales sur Π_0 :

$$\mathcal{L}(H \ln x)(p) = F(p) = -\frac{1}{p}(\gamma + \ln p), \quad p \in \Pi_0.$$

Comme $Vp \frac{H}{x} = (H \ln x)'$ alors

$$\mathcal{L}\left(Vp \frac{H}{x}\right) = p \mathcal{L}(H \ln x) = -\gamma - \ln p, \quad p \in \Pi_0.$$

2) La fonction $H\sqrt{x} \in L_{loc}^1(\mathbb{R})$ et si $\omega > 0$, on a pour $x > 1$

$$e^{-\omega x} \sqrt{x} \leq e^{-\omega x} x \in L^1([1, +\infty[),$$

donc $H\sqrt{x} \in E$ et $\mathcal{L}(H\sqrt{x})$ est définie sur Π_0 .

Soit $p \in \Pi_0$

$$\mathcal{L}(H\sqrt{x})(p) = \int_0^{+\infty} e^{-px} \sqrt{x} \, dx,$$

et en utilisant le changement de variable $t = \sqrt{x}$ puis une intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(H\sqrt{x})(p) &= 2 \int_0^{+\infty} e^{-pt^2} t^2 \, dt \\ &= \frac{-1}{p} e^{-pt^2} t \Big|_0^\infty + \frac{1}{p} \int_0^{+\infty} e^{-pt^2} \, dt = \frac{1}{p} \int_0^{+\infty} e^{-pt^2} \, dt. \end{aligned}$$

On pose

$$I(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt^2} dt, \quad p \in \mathbf{\Pi}_0.$$

La fonction I est holomorphe sur $\mathbf{\Pi}_0$, d'après les propriétés de la T.L., et pour $\eta > 0$, le changement de variable $s = \sqrt{\eta} t$ donne

$$I(\eta) = \int_0^{+\infty} e^{-s^2} \frac{ds}{\sqrt{\eta}} = \frac{1}{\sqrt{\eta}} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Par conséquent

$$I(p) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{\sqrt{p}}, \quad p \in \mathbf{\Pi}_0,$$

où $\sqrt{p}$ est la détermination principale de la racine carrée, c'est-à-dire

$$\sqrt{p} = e^{\frac{1}{2} \ln p} = \sqrt{|p|} e^{i \arg p}, \quad -\pi < \arg p \leq \pi.$$

On conclut que

$$\mathcal{L}(H\sqrt{x})(p) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{p\sqrt{p}}, \quad p \in \mathbf{\Pi}_0.$$

Solution 5.7. Cet exercice a déjà été traité dans le chapitre 3 (voir l'exercice 3.19). Nous allons le reprendre, en appliquant la T. L. On sait que si une distribution $T \in \mathcal{D}'_+$ admet un inverse S dans $\mathcal{D}'_+$, alors il est unique.

Soit $T \in \mathcal{A}$, $T \neq 0$, on cherche $S \in \mathcal{A}$ telle que $S * T = \delta$. En utilisant la T.L. cette égalité est équivalente à

$$\mathcal{L}(S * T) = \mathcal{L}(\delta) = 1,$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{L}(S) = \frac{1}{\mathcal{L}(T)}.$$

Par conséquent l'original de $\frac{1}{\mathcal{L}(T)}$ est l'inverse de convolution de T dans $\mathcal{D}'_+$.

▷ Soit $T = H$, $\mathcal{L}(T) = \frac{1}{p}$, $p \in \mathbf{\Pi}_0$, on cherche donc S telle que

$$\mathcal{L}(S) = \frac{1}{\mathcal{L}(T)} = p = \mathcal{L}(\delta'),$$

d'où

$$S = \delta' \text{ est l'inverse de } H \text{ dans } \mathcal{D}'_+.$$

▷ Soit $T = \delta' - a\delta$, $a \in \mathbb{C}$. On cherche S telle que

$$\mathcal{L}(S) = \frac{1}{\mathcal{L}(T)} = \frac{1}{p-a}, \quad p \in \mathbf{\Pi}_{\operatorname{Re} a}.$$

On voit qu'alors $S = e^{ax}H$.

▷ Soit $T = \delta'' - \lambda^2\delta$, ($\lambda \in \mathbb{C}$),

$$\mathcal{L}(T) = p^2 - \lambda^2, \quad p \in \mathbb{C}.$$

On cherche S telle que

$$\mathcal{L}(S) = \frac{1}{\mathcal{L}(T)} = \frac{1}{p^2 - \lambda^2}, \quad p \in \Pi_{|\operatorname{Re} \lambda|}.$$

Nous distinguons les deux cas suivants :

◇ Si $\lambda = 0$,

$$\mathcal{L}(S) = \frac{1}{p^2} = \mathcal{L}(xH)(p), \quad p \in \Pi_0,$$

donc

$$S = xH.$$

◇ Si $\lambda \neq 0$

$$\frac{1}{p^2 - \lambda^2} = \frac{1}{2\lambda} \left(\frac{1}{p - \lambda} - \frac{1}{p + \lambda} \right) = \frac{1}{2\lambda} \mathcal{L}(e^{\lambda x}H - e^{-\lambda x}H) = \mathcal{L}\left(H \frac{\operatorname{sh}(\lambda x)}{\lambda}\right),$$

donc

$$S = H \frac{\operatorname{sh}(\lambda x)}{\lambda}.$$

▷ Soit $T = \delta'' - 3\delta' + 2\delta$,

$$\mathcal{L}(T) = p^2 - 3p + 2 = (p - 1)(p - 2), \quad p \in \mathbb{C}.$$

On cherche S telle que

$$\mathcal{L}(S) = \frac{1}{\mathcal{L}(T)} = \frac{1}{(p - 1)(p - 2)}, \quad p \in \Pi_2.$$

$$\frac{1}{(p - 1)(p - 2)} = \frac{1}{p - 2} - \frac{1}{p - 1} = \mathcal{L}(e^{2x}H - e^xH),$$

donc

$$S = H(e^{2x} - e^x).$$

▷ Soit $T = H + \delta''$,

$$\mathcal{L}(T) = \frac{1}{p} + p^2 = \frac{p^3 + 1}{p}, \quad p \in \Pi_0.$$

On cherche S telle que

$$\mathcal{L}(S) = \frac{1}{\mathcal{L}(T)} = \frac{p}{p^3 + 1} =: F(p).$$

Comme $|F(p)| \leq \frac{1}{|p|^2}$ pour $\operatorname{Re} p$ grand, on peut utiliser la formule de Meslin-Fourier. F admet trois pôles simples : $p_1 = -1$, $p_2 = -j$ et $p_3 = -\bar{j}$, $j = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et on a

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(F(p)e^{px}, -1) &= e^{px} \frac{p}{(p^3 + 1)'} \Big|_{p=-1} = -\frac{1}{3} e^{-x}, \\ \operatorname{Res}(F(p)e^{px}, -j) &= e^{px} \frac{p}{(p^3 + 1)'} \Big|_{p=-j} = \frac{-1}{3j} e^{-jx}, \\ \operatorname{Res}(F(p)e^{px}, -\bar{j}) &= \overline{\operatorname{Res}(F(p)e^{px}, -j)}. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} S &= H \sum_{k=1}^3 \operatorname{Res}(F(p)e^{px}, p_k) \\ &= \frac{1}{3} \left(e^{\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \sqrt{3} e^{\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) - e^{-x} \right) H. \end{aligned}$$

Solution 5.8. (Voir aussi la résolution de l'exercice 3.21) Considérons une edo linéaire à coefficients constants. On sait que si elle admet une solution T dans $\mathcal{D}'_+$, cette solution est unique. En supposant que T admet une transformée de Laplace, on pose $F = \mathcal{L}(T)$, on prend la T. L. de l'équation différentielle pour obtenir l'équation algébrique vérifiée par F . L'original de F est la solution T cherchée dans $\mathcal{D}'_+$.

▷ Soit à résoudre dans $\mathcal{D}'_+$, l'edo

$$T' - T = \delta.$$

Avec les notations ci-dessus, on cherche F telle que

$$pF - F = 1, \quad \text{c'est-à-dire} \quad F = \frac{1}{p-1}, \quad p \in \Pi_1.$$

Comme

$$\frac{1}{p-1} = \mathcal{L}(e^x H), \quad p \in \Pi_1,$$

on conclut que

$$T = e^x H.$$

▷ On veut résoudre dans $\mathcal{D}'_+$, l'edo

$$T'' - 3T' + 2T = \delta' + \delta.$$

La T. L. de l'équation donne

$$p^2 F - 3pF + 2F = p + 1,$$

donc

$$F = \frac{p+1}{p^2-3p+2}, \quad p \in \mathbf{\Pi}_2.$$

Ainsi

$$F = \frac{3}{p-2} - \frac{2}{p-1} = 3\mathcal{L}(e^{2x}H) - 2\mathcal{L}(e^xH) = \mathcal{L}((3e^{2x} - 2e^x)H).$$

Donc

$$T = (3e^{2x} - 2e^x)H.$$

▷ Soit à résoudre dans $\mathcal{D}'_+$, l'équation différentielle

$$T^{(3)} - T'' + T' - T = \delta'' - \delta.$$

En procédant comme ci-dessus, on se ramène à chercher l'original de la fraction rationnelle

$$F = \frac{p^2-1}{p^3-p^2+p-1} = \frac{(p+1)(p-1)}{(p-1)(p^2+1)} = \frac{p+1}{p^2+1} = \frac{p}{p^2+1} + \frac{1}{p^2+1}.$$

Comme $\mathcal{L}((\sin x)H) = \frac{1}{p^2+1}$ et $\mathcal{L}((\cos x)H) = \frac{p}{p^2+1}$ pour $p \in \mathbf{\Pi}_0$, on voit que

$$F(p) = \mathcal{L}((\sin x + \cos x)H), \quad p \in \mathbf{\Pi}_0,$$

et on déduit que la solution de l'équation différentielle dans $\mathcal{D}'_+$ est

$$T = (\sin x + \cos x)H.$$

Solution 5.9. Soit y la solution classique du problème

$$\begin{cases} y^{(3)} - 4y'' + 5y' - 2y = e^{2x}, & x > 0, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 2. \end{cases}$$

On sait que $y \in \mathcal{C}^\infty([0, +\infty[)$. On pose $f = yH$ et on calcule les dérivées successives de f jusqu'à l'ordre 3, en utilisant la formule des sauts

$$f' = y'H + y(0)\delta = y'H,$$

$$f'' = y''H + y'(0)\delta = y''H + \delta,$$

$$f^{(3)} = y^{(3)}H + y''(0)\delta + \delta' = y^{(3)}H + 2\delta + \delta'.$$

On voit que

$$f^{(3)} - 4f'' + 5f' - 2f = (y^{(3)} - 4y'' + 5y' - 2y) H - 2\delta + \delta',$$

donc f est la solution dans $\mathcal{D}'_+$ de l'équation différentielle

$$f^{(3)} - 4f'' + 5f' - 2f = e^{2x}H - 2\delta + \delta'.$$

On suppose que f admet une T. L. et on pose $F = \mathcal{L}(f)$. F vérifie l'équation suivante

$$F(p^3 - 4p^2 + 5p - 2) = \frac{1}{p-2} + p - 2 = \frac{(p-2)^2 + 1}{p-2},$$

d'où pour $p \in \mathbb{N}_2$

$$\begin{aligned} F &= \frac{(p-2)^2 + 1}{(p-2)(p^3 - 4p^2 + 5p - 2)} = \frac{(p-2)^2 + 1}{(p-2)^2(p-1)^2} \\ &= \frac{2}{(p-1)^2} + \frac{2}{p-1} + \frac{1}{(p-2)^2} - \frac{2}{p-2} \\ &= -2(\mathcal{L}(e^x H))' + 2\mathcal{L}(e^x H) - (\mathcal{L}(e^{2x} H))' - 2\mathcal{L}(e^{2x} H) \\ &= 2\mathcal{L}(xe^x H) + 2\mathcal{L}(e^x H) + \mathcal{L}(xe^{2x} H) - 2\mathcal{L}(e^{2x} H) \\ &= \mathcal{L}((2xe^x + 2e^x + xe^{2x} - 2e^{2x})H), \end{aligned}$$

ce qui entraîne que $f = H(2(x+1)e^x + (x-2)e^{2x})$ et

$$y = 2(x+1)e^x + (x-2)e^{2x}, \quad x \geq 0.$$

Solution 5.10. Soit l'équation intégral-différentielle

$$\begin{cases} y''(x) + y(x) + \int_0^x e^{x-t} y(t) dt = 0, & x > 0, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1. \end{cases}$$

On procède comme pour l'exercice précédent et on pose $f = yH$. On a donc

$$f' = y'H + y(0)\delta = y'H,$$

$$f'' = y''H + y'(0)\delta = y''H + \delta.$$

Maintenant, on multiplie l'équation par H

$$y''H + yH + H \int_0^x e^{x-t} y(t) dt = 0,$$

et on la réécrit en fonction de f

$$f'' + f + (f * e^x H) = \delta.$$

On suppose que f admet une T. L. notée F , avec cette transformation l'équation précédente devient

$$\left(p^2 + 1 + \frac{1}{p-1}\right) F = 1,$$

d'où

$$F = \frac{p-1}{p(p^2-p+1)}, \quad p \in \Pi_{\frac{1}{2}},$$

les pôles de F étant $p_1 = 0$, $p_2 = -j$ et $p_3 = -\bar{j}$, avec $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Comme pour $\operatorname{Re} p$ grand, $|F(p)| \leq \frac{C}{|p|^2}$, où $C > 0$ est une constante, alors on peut appliquer la formule de Meslin-Fourier pour déterminer l'original de F , on a donc pour η assez grand

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\eta-i\infty}^{\eta+i\infty} F(p) e^{px} dp = H \sum_{k=1}^3 \operatorname{Res}(F(p) e^{px}, p_k).$$

Après calcul, on trouve

$$f(x) = \left(\left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right) e^{\frac{x}{2}} - 1 \right) H,$$

et donc

$$y = \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right) e^{\frac{x}{2}} - 1, \quad x \geq 0.$$

Solution 5.11. On pose $f = xH$ et $g = yH$ et on utilise la T.L. pour résoudre le système d'edo vérifié par f et g dans $\mathcal{D}'_+$. On a

$$f' = x'H + x(0)\delta = x'H + \delta,$$

$$g' = y'H + y(0)\delta = y'H + 2\delta.$$

On multiplie les deux équations par H et on écrit le système d'edo satisfait par f et g dans $\mathcal{D}'_+$

$$f' - f - 4g = \delta, \quad g' + f + 3g = 2\delta.$$

On suppose que f et g admettent des T. L. et on pose $F = \mathcal{L}(f)$ et $G = \mathcal{L}(g)$. On a alors

$$(p-1)F - 4G = 1, \quad F + (p+3)G = 2,$$

d'où

$$F = \frac{p+11}{(p-1)^2}, \quad G = \frac{2p-3}{(p-1)^2}, \quad p \in \Pi_1.$$

On a

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{p-1} + 12 \frac{1}{(p-1)^2} = \mathcal{L}(e^t H) - 12 \left(\mathcal{L}(e^t H) \right)' \\ &= \mathcal{L} \left((1 + 12t) e^t H \right), \quad p \in \Pi_1, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} G &= \frac{2}{p-1} - \frac{1}{(p-1)^2} = 2\mathcal{L}(e^t H) + \left(\mathcal{L}(e^t H) \right)' \\ &= \mathcal{L} \left((2-t) e^t H \right), \quad p \in \Pi_1. \end{aligned}$$

Par conséquent la solution du système donné est

$$x = (1 + 12t)e^t, \quad y = (2 - t)e^t, \quad t \geq 0.$$

Solution 5.12. On pose $f(t, x) = u(t, x) H(t)$ et on suppose que f admet une T.L. partielle par rapport à t définie par

$$F(p, x) = \mathcal{L}_t(f(t, x))(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t, x) dt,$$

lorsque l'intégrale a un sens. On a alors (formellement)

$$\mathcal{L}_t(\partial_t f) = p\mathcal{L}_t(f) = pF, \quad \mathcal{L}_t(\partial_x f) = \partial_x(\mathcal{L}_t(f)) = \partial_x F.$$

Calculons maintenant $\partial_t^2 f$ et $\partial_x^2 f$. On a

$$\begin{aligned} \partial_t f &= \partial_t u H(t) + u(0, x) \delta(t) = \partial_t u H(t), \\ \partial_t^2 f &= \partial_t^2 u H(t) + \partial_t u(0, x) \delta(t) = \partial_t^2 u H(t) + \sin(2\pi x) \delta(t), \\ \partial_x^2 f &= \partial_x^2 u H(t). \end{aligned}$$

On multiplie l'edp par $H(t)$ et on écrit l'équation par rapport à f

$$a^2 \partial_t^2 f - \partial_x^2 f = (a^2 \partial_t^2 u - \partial_x^2 u) H(t) + a^2 \sin(2\pi x) \delta(t).$$

Ainsi f vérifie le problème suivant

$$\begin{cases} a^2 \partial_t^2 f - \partial_x^2 f = a^2 \sin(2\pi x) \delta(t), \\ f(t, 0) = f(t, 1) = 0. \end{cases}$$

En passant à la T.L., comme $\mathcal{L}_t(\delta(t)) = 1$, on trouve

$$\begin{cases} a^2 p^2 F(p, x) - \partial_x^2 F(p, x) = a^2 \sin(2\pi x), & 0 < x < 1, \\ F(p, 0) = F(p, 1) = 0. \end{cases}$$

$F(p, x)$ vérifie une edo linéaire d'ordre 2 par rapport à la variable x (p joue le rôle d'un paramètre), de la forme

$$-y'' + a^2 p^2 y = a^2 \sin(2\pi x), \quad 0 < x < 1.$$

Son équation caractéristique est

$$-r^2 + a^2 p^2 = 0,$$

donc la solution de l'équation homogène s'écrit (pour p fixé)

$$y_h = K_1 e^{apx} + K_2 e^{-apx}, \quad K_i \in \mathbb{C}.$$

On cherche maintenant une solution particulière de l'équation avec second membre de la forme

$$y_P = A_p \cos(2\pi x) + B_p \sin(2\pi x),$$

où A_p et B_p sont des constantes (pouvant dépendre de p). Après calcul, on trouve $A_p = 0$ et $B_p = \frac{a^2}{a^2 p^2 + 4\pi^2}$ c'est-à-dire

$$y_P = \frac{a^2}{a^2 p^2 + 4\pi^2} \sin(2\pi x).$$

Ainsi la solution générale est donnée par

$$y = K_1 e^{apx} + K_2 e^{-apx} + a^2 \frac{\sin(2\pi x)}{a^2 p^2 + 4\pi^2}, \quad K_i \in \mathbb{C}.$$

On a donc

$$F(p, x) = C_1(p) e^{apx} + C_2(p) e^{-apx} + a^2 \frac{\sin(2\pi x)}{a^2 p^2 + 4\pi^2},$$

où les fonctions $C_i(p)$ sont à déterminer. Pour cela, on utilise les conditions $F(p, 0) = F(p, 1) = 0$ qui se traduisent par $C_1(p) = C_2(p) = 0$, d'où

$$\begin{aligned} F(p, x) &= a^2 \frac{\sin(2\pi x)}{a^2 p^2 + 4\pi^2} = \frac{1}{p^2 + \left(\frac{2\pi}{a}\right)^2} \sin(2\pi x) \\ &= \mathcal{L}_t \left(\frac{a}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi t}{a}\right) H(t) \right) \sin(2\pi x) \\ &= \mathcal{L}_t \left(\frac{a}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi t}{a}\right) H(t) \sin(2\pi x) \right), \quad p \in \mathbf{\Pi}_0. \end{aligned}$$

On conclut que

$$f(t, x) = \frac{a}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi}{a}t\right) \sin(2\pi x) H(t),$$

c'est-à-dire

$$u(t, x) = \frac{a}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi t}{a}\right) \sin(2\pi x), \quad (t, x) \in [0, +\infty[\times [0, 1].$$